

سامانه بانک تستی

FlowRax

فـ لـ رـ اـ خ

Math

@Flow_KonKour

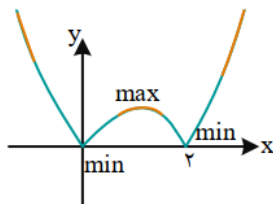


@LoPRax_KonKour



کلیک کن وباماهمراه شو!

۱



نمودار تابع حوالی $X=0$ مشابه $|x|$ و حوالی $x=2$ به صورت $\sqrt[3]{(x-2)^2}$ است:
مشخص است که تابع دارای $\min 2$ و $\max 1$ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$x=2$ ریشه مشتق تابع است ولی چون اکسترمم نسبی نمی‌باشد، بنابراین در این نقطه تغییر علامت نمی‌دهد. یعنی ریشه مضاعف f' است. در نتیجه $f''(2)$ نیز برابر صفر است.

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + b \Rightarrow f''(x) = 12x^2 + 6ax$$

$$f''(2) = 0 \Rightarrow 48 + 12a = 0 \Rightarrow a = -4$$

$$f'(2) = 0 \Rightarrow 32 + 12a + b = 0 \Rightarrow 32 - 48 + b = 0 \Rightarrow b = 16$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 16 = 4(x^3 - 3x^2 + 4) = 4(x-2)^2(x+1)$$

خواهیم داشت:

مینیمم مطلق تابع در $x=-1$ رخ می‌دهد.

x	-1	2
y'	-	+
y	min	

بنابراین مینیمم مطلق برابر است با:

$$f(-1) = 1 - a - b = 1 + 4 - 16 = -11$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

می‌دانیم مشتق تابع $f(x) = \sqrt[3]{g(x)}$ به صورت $f'(x) = \frac{g'(x)}{3\sqrt[3]{g^2(x)}}$ می‌باشد، پس تابع f فقط وقتی دارای یک نقطه بحرانی است که معادله $g'(x) = 0$ دارای

فقط یک ریشه باشد، پس داریم:

$$f(x) = \sqrt[3]{2x^2 + mx + 3m} \Rightarrow f'(x) = \frac{4x + m}{3\sqrt[3]{(2x^2 + mx + 3m)^2}} = 0 \Rightarrow 4x + m = 0 \Rightarrow x = \frac{-m}{4}$$

شرط این که تابع f فقط دارای یک نقطه بحرانی باشد این است که در مخرج مشتق شرط $\Delta \leq 0$ برقرار باشد، زیرا در این صورت نقطه بحرانی دیگری به غیر از ریشه صورت نخواهیم داشت (توجه شود که در حالت $\Delta = 0$ ریشه صورت همان ریشه مضاعف مخرج کسر خواهد بود) پس داریم:

$$2x^2 + mx + 3m = 0 \Rightarrow \Delta \leq 0 \Rightarrow m^2 - 4(2)(3m) \leq 0 \Rightarrow m^2 - 24m \leq 0$$

$$\Rightarrow m(m - 24) \leq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 \leq m \leq 24$$

پس به ازای 24 مقدار برای m ، تابع f دارای فقط یک نقطه بحرانی خواهد بود.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳

۴

نکته (تعریف): با فرض $c \in D_f$ ، نقطه $(c, f(c))$ ، یک نقطهٔ ماکزیمم مطلق برای تابع f نامیده می‌شود، هرگاه به‌ازای هر x از D_f داشته باشیم $f(c) \geq f(x)$. در این حالت عدد $f(c)$ را مقدار ماکزیمم مطلق f روی D_f می‌نامیم.

با دوران پاره خط AB حول محور عرض‌ها، مخروطی به‌دست می‌آید که شعاع قاعده آن $OA = r$ و ارتفاع آن $OB = h$ است. با استفاده از رابطه فیثاغورس داریم:

$$OA^2 + OB^2 = 3 \Rightarrow r^2 + h^2 = 3 \Rightarrow r^2 = 3 - h^2 \quad (*)$$

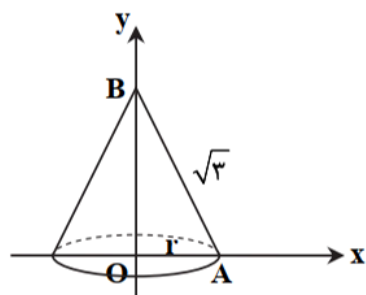
اکنون تابع حجم مخروط را می‌نویسیم:

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h \stackrel{(*)}{=} \frac{\pi}{3} (3 - h^2) \times h = \frac{\pi}{3} (3h - h^3)$$

با محاسبه V' و حل معادله $V' = 0$ ، داریم:

$$V' = \frac{\pi}{3} (3 - 3h^2) \quad V' = 0 \Rightarrow h^2 = 1 \xrightarrow{h>0} h = 1 \xrightarrow{(*)} r = \sqrt{2}$$

پس حجم مخروط هنگامی بیشترین مقدار است که $r = \sqrt{2}$ و $h = 1$ باشد. یعنی $V_{\max} = \frac{2\pi}{3}$.

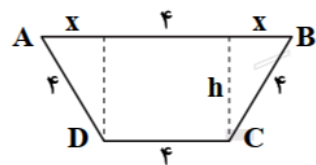


(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵

نکته (تعریف): با فرض $c \in D_f$ ، نقطه $(c, f(c))$ ، یک نقطهٔ ماکزیمم مطلق برای تابع f نامیده می‌شود، هرگاه به‌ازای هر x از D_f داشته باشیم $f(c) \geq f(x)$. در این حالت عدد $f(c)$ را مقدار ماکزیمم مطلق f روی D_f می‌نامیم.

برای اینکه پنجره بیشترین نوردهی را داشته باشد، باید مساحت آن ماکزیمم شود. پس تابع مساحت دوزنقه را تشکیل می‌دهیم. با توجه به رابطه فیثاغورس داریم:



$$x^2 + h^2 = 4^2 \Rightarrow h^2 = 16 - x^2 \xrightarrow{h>0} h = \sqrt{16 - x^2} \quad (*)$$

بنابراین:

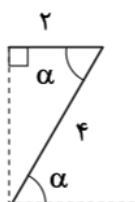
$$S = \frac{1}{2} (AB + DC) h \xrightarrow{(*)} S = \frac{1}{2} (2x + 4 + 4) (\sqrt{16 - x^2}) = (x + 4) \sqrt{16 - x^2}$$

اکنون S' را به‌دست می‌آوریم و معادله $S' = 0$ را حل می‌کنیم:

$$S' = \sqrt{16 - x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{16 - x^2}} (x + 4) = \sqrt{16 - x^2} - \frac{x(x + 4)}{\sqrt{16 - x^2}} = \frac{16 - x^2 - x^2 - 4x}{\sqrt{16 - x^2}} = \frac{-2x^2 - 4x + 16}{\sqrt{16 - x^2}}$$

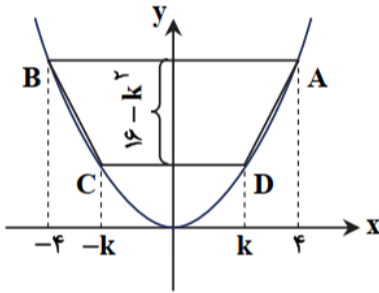
$$\xrightarrow{S'=0} -2x^2 - 4x + 16 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 4) = 0 \xrightarrow{x>0} \begin{cases} x = 2 & \checkmark \\ x = -4 & \times \end{cases}$$

با توجه به شکل داریم:



$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)



با توجه به شکل، اندازه پاره‌های AB و CD به ترتیب قاعده بزرگ و کوچک دوزنقه و عدد $16 - k^2$ ارتفاع دوزنقه است. پس ابتدا معادلات $f(x) = 16$ و $f(x) = k^2$ را حل می‌کنیم:

$$f(x) = x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4 \Rightarrow x_A = 4, x_B = -4 \Rightarrow \text{طول } AB = 8$$

$$f(x) = x^2 = k^2 \Rightarrow x = \pm k \xrightarrow{k > 0} x_D = k, x_C = -k \Rightarrow \text{طول } CD = 2k$$

اکنون تابع مساحت دوزنقه را می‌نویسیم:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD)(16 - k^2) \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}(8 + 2k)(16 - k^2) = -k^3 - 4k^2 + 16k + 64$$

حال معادله $S' = 0$ را حل می‌کنیم و طول نقاط بحرانی را به دست می‌آوریم:

$$S' = -3k^2 - 8k + 16 = 0 \xrightarrow{\Delta = 256} k = \frac{8 \pm 16}{-6} \Rightarrow \begin{cases} k = -4 & * \quad (0 < k < 4) \\ k = \frac{4}{3} \end{cases}$$

پس بیشترین مقدار مساحت دوزنقه $ABCD$ وقتی اتفاق می‌افتد که $k = \frac{4}{3}$ باشد.

بنابراین:

$$k = \frac{4}{3} \Rightarrow 9k^2 - 24k = 9\left(\frac{16}{9}\right) - 24\left(\frac{4}{3}\right) = 16 - 32 = -16$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: یافتن اکسترم‌های مطلق تابع پیوسته f در بازه بسته $[a, b]$ به شرح زیر است:

(۱) مشتق تابع را به دست آورده و نقاط بحرانی f را می‌یابیم.

(۲) مقدار تابع را در هریک از نقاط بحرانی و همچنین در نقاط انتهایی بازه محاسبه می‌کنیم.

(۳) در مرحله ۲، بزرگ‌ترین عدد به دست آمده، مقدار ماکزیمم مطلق تابع و کوچک‌ترین آن‌ها مینیمم مطلق تابع در بازه $[a, b]$ است. ابتدا دامنه تابع را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \sqrt{5-x} + 2\sqrt{5-x^2} \Rightarrow 5-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 5 \Rightarrow x \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$$

$x = \pm\sqrt{5}$ طول نقاط بحرانی تابع f هستند. اکنون طول نقاط بحرانی دیگر تابع را در بازه $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$ به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = -1 + \frac{2(-2x)}{2\sqrt{5-x^2}} = -1 - \frac{2x}{\sqrt{5-x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x}{\sqrt{5-x^2}} = -1 \Rightarrow -2x = \sqrt{5-x^2} \xrightarrow[\text{توان ۲}]{x < 0} 4x^2 = 5 - x^2 \Rightarrow x = \pm 1 \xrightarrow{x < 0} x = -1$$

پس $x = -1$ طول سومین نقطه بحرانی تابع است. اکنون با محاسبه عرض نقاط بحرانی تابع، داریم:

$$f(-\sqrt{5}) = \sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

$$f(\sqrt{5}) = \sqrt{5} - \sqrt{5} = 0 \quad \text{مینیمم مطلق}$$

$$f(-1) = \sqrt{5} + 1 + 2\sqrt{4} = 5 + \sqrt{5} \quad \text{ماکزیمم مطلق}$$

پس حاصل خواسته شده برابر است با:

$$\max + \min = 5 + \sqrt{5} + 0 = 5 + \sqrt{5}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته ۱: فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

نکته ۲: فرض کنیم c طول نقطه بحرانی تابع f باشد که f در c پیوسته است و همچنین f در یک همسایگی محذوف c مشتق پذیر باشد. اگر علامت f' در $x = c$ از مثبت به منفی تغییر کند، آنگاه $x = c$ طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع f است. مشتق تابع و طول نقطه بحرانی تابع را می‌یابیم:

$$f(x) = x + \sqrt{2x - x^2}, \quad 2x - x^2 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

$$f'(x) = 1 + \frac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2}} = 1 + \frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}} = \frac{\sqrt{2x - x^2} + 1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x - x^2} + 1 - x = 0 \Rightarrow \sqrt{2x - x^2} = x - 1 \xrightarrow{\text{توان}^2} 2x - x^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0, \quad \Delta = 16 - 8 = 8 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ق.ق.غ. (در معادله اولیه صدق نمی‌کند)} \\ x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ق.ق.} \end{cases}$$

بنابراین:

$$f\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2 + \sqrt{2} - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2 + \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} - \frac{1}{2}} = 1 + \sqrt{2}$$

x	0	$1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	2
f'(x)	+	0	-
f(x)	0	$1 + \sqrt{2}$	2

max نسبی

بنابراین نقطه $A\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \sqrt{2}\right)$ نقطه ماکزیمم نسبی تابع است، پس:

$$\frac{\left|1 + \sqrt{2} - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: نقطه به طول $x = c$ از دامنه تابع f را یک نقطه بحرانی برای این تابع می‌نامیم هرگاه $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

ابتدا وضعیت $\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor$ را در بازه $(1, 5)$ مشخص می‌کنیم:

$$1 < x < 5 \Rightarrow \begin{cases} 1 < x < 3 \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = 0 \\ 3 \leq x < 5 \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x^2 - 8x & 1 < x < 3 \\ \frac{2}{3}x^2 - 3x^2 - 8x & 3 \leq x < 5 \end{cases} \Rightarrow f' = \begin{cases} 2x^2 - 8 & 1 < x < 3 \\ 2x^2 - 6x - 8 & 3 \leq x < 5 \end{cases}$$

تابع در $x = 3$ مشتق ندارد. $\Rightarrow$ تابع در $x = 3$ پیوسته نیست. $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -6$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -33$

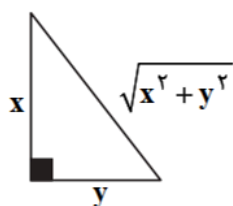
پس $x = 3$ که نقطه مرزی است، اولین نقطه بحرانی است.

$$f' = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \xrightarrow{1 < x < 3} x = 2 \\ 2x^2 - 6x - 8 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 4 \xrightarrow{3 \leq x < 5} x = 4 \end{cases}$$

در نتیجه $x = 2, 3, 4$ ، طول نقاط بحرانی تابع هستند؛ که مجموع آنها برابر با ۹ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته (تعریف): با فرض $c \in D_f$ ، یک نقطهٔ ماکزیمم مطلق برای تابع f نامیده می‌شود، هرگاه به‌ازای هر x از D_f داشته باشیم: $f(c) \geq f(x)$. در این حالت عدد $f(c)$ را مقدار ماکزیمم مطلق f روی D_f می‌نامیم. اگر اضلاع قائم این مثلث x و y باشند، داریم:



$$x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 12, \quad S = \frac{1}{2}xy \quad (*)$$

اکنون باید رابطه‌ای بین دو متغیر x و y به‌دست آوریم:

$$\begin{aligned} x + y - 12 &= -\sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow (x + y - 12)^2 = (-\sqrt{x^2 + y^2})^2 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 + 144 + 2xy - 24x - 24y &= x^2 + y^2 \Rightarrow 144 + 2xy - 24x - 24y = 0 \\ \Rightarrow 2xy - 24y &= 24x - 144 \Rightarrow y(2x - 24) = 24x - 144 \Rightarrow y = \frac{12x - 72}{x - 12} \end{aligned}$$

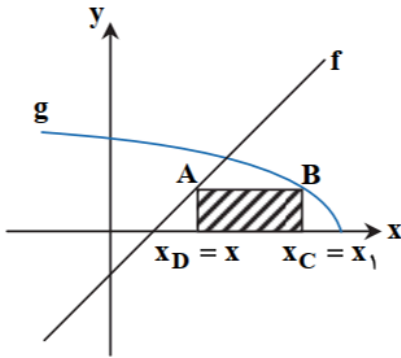
اکنون تابع S را برحسب x تشکیل می‌دهیم و طول نقطهٔ ماکزیمم مطلق آن را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} (*) \Rightarrow S &= \frac{1}{2}x \left(\frac{12x - 72}{x - 12} \right) = 6 \left(\frac{x^2 - 6x}{x - 12} \right) \\ S' &= 6 \times \frac{(2x - 6)(x - 12) - (x^2 - 6x)}{(x - 12)^2} \Rightarrow S' = \frac{6(x^2 - 24x + 72)}{(x - 12)^2} \\ S' &= 0 \Rightarrow x^2 - 24x + 72 = 0 \Rightarrow x = 12 \pm 6\sqrt{2} \xrightarrow{x < 12} x = 12 - 6\sqrt{2} = 6(2 - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

با فرض $x_D = x$ و $x_C = x_1$ داریم:

$x_1 - x$ = طول مستطیل و $y_A = x - 1$ = عرض مستطیل



اکنون بین x_1 و x ، رابطه‌ای به دست می‌آوریم:

$$f(x) = g(x_1) \Rightarrow x - 1 = \sqrt{7 - x_1} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 - 2x + 1 = 7 - x_1 \Rightarrow x_1 = -x^2 + 2x + 6 \quad (*)$$

اکنون تابع مساحت مستطیل را می‌نویسیم:

$$S_{ABCD} = (x - 1)(x_1 - x) \xrightarrow{(*)} S = (x - 1)(-x^2 + 2x + 6 - x) \Rightarrow S = (x - 1)(-x^2 + x + 6)$$

با محاسبه S' و یافتن نقاط بحرانی S ، داریم:

$$S' = (-x^2 + x + 6) + (-2x + 1)(x - 1) = -x^2 + x + 6 - 2x^2 + 3x - 1 = -3x^2 + 4x + 5$$

$$\Rightarrow S' = 0 \xrightarrow{\Delta=76} x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{19}}{-6} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-2 + \sqrt{19}}{-3} < 0 \quad \times \\ x = \frac{-2 - \sqrt{19}}{-3} = \frac{2 + \sqrt{19}}{3} \quad \checkmark \end{cases}$$

پس طول نقطه D ، برابر با $\frac{2 + \sqrt{19}}{3}$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: اگر نقطه $A(a, b)$ ، اکستریم نسبی تابع f باشد و $f'(a)$ موجود باشد، آنگاه:

$$f(a) = b \text{ و } f'(a) = 0$$

عبارت داخل قدرمطلق یعنی $x - 1$ ، در $x = 1$ تغییر علامت می‌دهد.

چون $x = -2$ طول اکستریم نسبی است، پس کافی است مسئله را در حالت $x < 1$ حل کنیم:

$$x < 1 \Rightarrow |x - 1| = -x + 1$$

$$f(x) = x^2 |x - 1| + ax^2 + b$$

$$\xrightarrow{x < 1} f(x) = x^2(-x + 1) + ax^2 + b$$

$$\Rightarrow f(x) = -x^3 + x^2 + ax^2 + b \quad (*)$$

$x = -2$ طول اکستریم نسبی است، پس $f'(-2) = 0$ است:

$$f'(x) = -3x^2 + 2x + 2ax \xrightarrow{x=-2} -16 - 4a = 0 \Rightarrow a = -4$$

از طرفی $f(-2) = 1$ ، بنابراین:

$$x = -2 \xrightarrow{(*)} 8 + 4 - 16 + b = 1 \Rightarrow b = 5$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۳

نکته: برای حل مسائل بهینه‌سازی، ابتدا تابع موردنظر را تشکیل می‌دهیم و سپس اکسترم‌های مطلق آن را با توجه به شرایط مسئله به‌دست می‌آوریم.

اگر نقطه M با طول $x = \alpha$ روی تابع $y = \sqrt{4-x}$ باشد، مختصات M به‌صورت $M(\alpha, \sqrt{4-\alpha})$ است.

اکنون تابع مساحت ذوزنقه $AMBO$ را می‌نویسیم:

$$S_{AMBO} = \frac{(OA + BM)(OB)}{2} = \frac{(2 + \sqrt{4-\alpha})(\alpha)}{2} = \frac{1}{2}\alpha(2 + \sqrt{4-\alpha})$$

حال با محاسبه مشتق تابع به‌دست آمده داریم:

$$S' = \frac{1}{2} \left[2 + \sqrt{4-\alpha} + \frac{-\alpha}{2\sqrt{4-\alpha}} \right] = 0 \Rightarrow 2 + \sqrt{4-\alpha} + \frac{-\alpha}{2\sqrt{4-\alpha}} = 0 \Rightarrow \frac{2(\sqrt{4-\alpha})^2 - \alpha}{2\sqrt{4-\alpha}} = -2 \Rightarrow \frac{8 - 3\alpha}{2\sqrt{4-\alpha}} = -2$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{4-\alpha} = 3\alpha - 8 \xrightarrow{3\alpha-8 \geq 0} 16(4-\alpha) = 9\alpha^2 - 48\alpha + 64 \Rightarrow 9\alpha^2 - 32\alpha = 0 \Rightarrow \alpha(9\alpha - 32) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 & * \\ \alpha = \frac{32}{9} & \checkmark \end{cases}$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۴

نکته: فرض کنیم $c \in D_f$ و f در یک همسایگی از c تعریف شده باشد. نقطه به طول c را یک نقطه بحرانی برای تابع f می‌نامیم، هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد یا $f'(c)$ موجود نباشد.

ابتدا مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} - 1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

ریشه‌های صورت و مخرج کسر تابع مشتق، طول نقاط بحرانی هستند.

$$\sqrt[3]{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$\sqrt[3]{(x+1)^2} = 1 \Rightarrow (x+1)^2 = 1 \Rightarrow x+1 = \pm 1 \Rightarrow x = 0, -2$$

بنابراین نقاط $(0, -1)$ ، $(-1, -\frac{1}{3})$ و $(-2, \frac{1}{3})$ نقاط بحرانی تابع هستند. مجموع عرض این ۳ نقطه برابر -1 است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۵

نکته ۱: اگر $x = c$ طول اکسترمم نسبی تابع مشتق پذیر f باشد، آنگاه $f'(c) = 0$ است.

نکته ۲: فرض کنیم c طول نقطه بحرانی تابع f باشد که در c پیوسته و همچنین در یک همسایگی محذوف c مشتق پذیر است. اگر علامت f' در $x = c$ از مثبت به منفی تغییر کند، آنگاه $x = c$ طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع f است.

۱- $x = -1$ طول نقطه اکسترمم نسبی تابع مشتق پذیر f است، پس:

$$f'(x) = \frac{(4x+a)(x^2+2x-2) - (2x+2)(2x^2+ax+5)}{(x^2+2x-2)^2}$$

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow -4 + a = 0 \Rightarrow a = 4$$

پس داریم:

$$f'(x) = \frac{(4x+4)(x^2+2x-2) - (2x+2)(2x^2+4x+5)}{(x^2+2x-2)^2} = \frac{(2x+2)(2x^2+4x-4-2x^2-4x-5)}{(x^2+2x-2)^2} = \frac{-9(2x+2)}{(x^2+2x-2)^2}$$

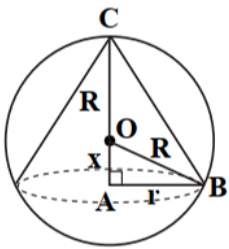
x	-1
f'	$\begin{array}{c} + \\ \circ \\ - \end{array}$
f	$\nearrow \text{max} \searrow$

بنابراین مطابق نکته ۲ و جدول تعیین علامت فوق، $a = 4$ و نوع اکسترمم ماکزیمم نسبی است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۶

با توجه به شکل روبه‌رو داریم:



$AB = r$ شعاع قاعده مخروط و $AC = R + x$ ارتفاع مخروط

$$\triangle AOB : OA^2 + AB^2 = OB^2 \Rightarrow x^2 + r^2 = R^2 \Rightarrow r^2 = R^2 - x^2 \quad (*)$$

اکنون تابع حجم مخروط را می‌نویسیم:

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{\pi}{3} (AB)^2 (AC) = \frac{\pi}{3} (r^2) (R+x) \xrightarrow{(*)} V = \frac{\pi}{3} (R^2 - x^2) (R+x)$$

حال مشتق تابع V را به دست آورده و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$V' = \frac{\pi}{3} [(-2x)(R+x) + (1)(R^2 - x^2)]$$

$$V' = 0 \Rightarrow -2x(R+x) + (R-x)(R+x) = 0 \Rightarrow (R+x)(-2x+R-x) = 0 \xrightarrow{R+x > 0} -3x + R = 0 \Rightarrow x = \frac{R}{3}$$

طبق فرض سؤال بیشترین حجم در حالتی رخ می‌دهد که ارتفاع برابر ۸ باشد، یعنی $R+x=8$. پس داریم:

$$x = 8 - R, x = \frac{R}{3} \Rightarrow 8 - R = \frac{R}{3} \Rightarrow 8 = \frac{4R}{3} \Rightarrow R = 6$$

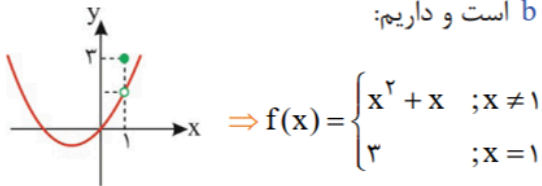
بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۷

پله اول: چون تابع f در نقطه $A(1, 3)$ دارای ماکزیمم نسبی است و تابع $f(x) = x^2 + ax$ با شرط $x \neq a$ دارای مینیمم نسبی است.

پس مطابق شکل تابع در $x = a$ ماکزیمم نسبی ای برابر b دارد. پس $a = 1$ و $b = 3$ است و داریم:



پله دوم: حال مقدار مینیمم تابع را به دست می آوریم:

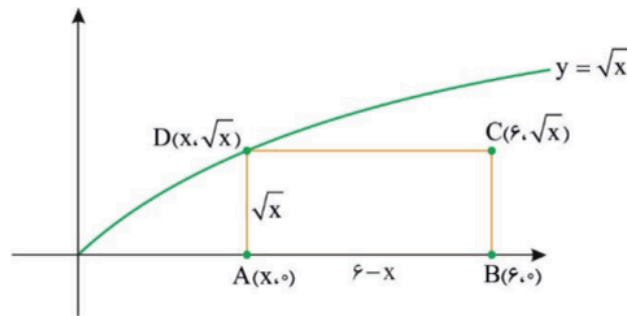
$$x_{\min} = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y_{\min} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۸

پله اول: مساحت مستطیل را به صورت تابعی بر حسب طول یا عرض آن نوشته و از تابع مشتق می گیریم. مشتق تابع را مساوی صفر

قرار داده تا مقادیری که با آنها بیشترین مساحت به دست می آید را حساب کنیم.



پله دوم: با توجه به اینکه نقطه D روی نمودار و مختصات $B(6, 0)$ است طول و عرض مستطیل بر حسب x به دست می آید.

$$S = AD \times AB \Rightarrow S(x) = \sqrt{x}(6-x) \Rightarrow S(x) = 6\sqrt{x} - x\sqrt{x}$$

$$S'(x) = 6 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \times x \Rightarrow S'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{3}{2}\sqrt{x} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\sqrt{x} \Rightarrow x = 2 \rightarrow D(2, \sqrt{2}) \rightarrow a = 2$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۹

$$f(x) = \pm(x^2 + ax^2) \quad f'(x) = \pm(2x + 2ax) \quad f' = 0 \Rightarrow x = 0, x = -\frac{2a}{2}$$

در ضمن $x = -a$ نیز بحرانی است پس دو حالت دارد.

$$\begin{cases} -a = 2 \\ \frac{-2a}{2} = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = \frac{4}{2} \end{cases} \Rightarrow 5a + 3b = -6$$

$$\begin{cases} -a = b \\ \frac{-2a}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow 5a + 3b = -6$$

حاصل $5a + 3b$ فقط با -6 برابر است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۰

اول تعداد نقاط بحرانی تابع $y = [3x]$ را در فاصله $[1, 2]$ پیدا می‌کنیم. می‌دانیم نقاط ابتدا و انتهای بازه حتماً بحرانی هستند. پس $x = 1$ و $x = 2$ بحرانی هستند.

به علاوه در $x = \frac{4}{3}$ و $x = \frac{5}{3}$ عبارت داخل جزء صحیح، یعنی $3x$ عددی صحیح می‌شود و در نتیجه $[3x]$ ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر و بحرانی است.

پس تا اینجا ۴ نقطه بحرانی قطعی داریم. نقطه بحرانی بعدی ریشه مشتق $ax^2 + bx + c$ می‌تواند باشد. برای مثال اگر داشته باشیم $f(x) = (x^2 - 3x)[3x]$ این تابع در $x = \frac{3}{2}$ که ریشه مشتق $x^2 - 3x$ است نیز بحرانی دارد. پس در مجموع $f(x)$ حداقل ۴ و حداکثر ۵ نقطه بحرانی در فاصله $[1, 2]$ خواهد داشت.

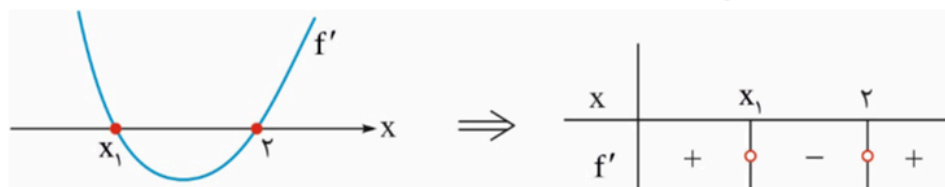
فارغ از مقدار $y = ax^2 + bx + c$ تمامی نقاطی به طول‌های $x = \frac{5}{3}$ و $x = \frac{4}{3}$ ، $x = 1$ ، برای $f(x) = (ax^2 + bx + c)$ بحرانی هستند.

چون اگر $ax^2 + bx + c$ عامل صفر کننده درجه اول در $x = \frac{5}{3}$ و $x = \frac{4}{3}$ داشته باشد این نقاط گوشه‌ای و بحرانی خواهند بود و اگر عامل درجه ۲ داشته باشد مشتق در این نقطه صفر بحرانی است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۱

چون تابع f در $x = 2$ دارای مینیمم نسبی است، پس نمودار تابع $f'(x) = 3x^2 - 2ax + b + 2$ به صورت مقابل است:



بنابراین می‌توانیم ضابطه f' را به صورت $f'(x) = 3(x - 2)(x - x_1)$ در نظر بگیریم و داریم:

$$6x_1 = b + 2 \Rightarrow x_1 = \frac{b+2}{6} \xrightarrow{x_1 < 2} \frac{b+2}{6} < 2 \Rightarrow b < 10$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۲

اگر $x=2$ فقط ریشهٔ مخرج تابع $y_1 = \frac{x^2 - ax + b}{x-2}$ باشد، در این صورت نمودار y_1 در همسایگی $x=2$ به صورت

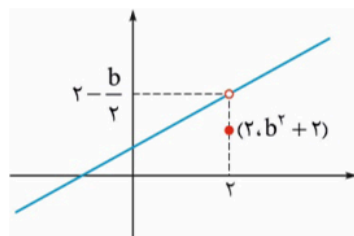


خواهد بود که در این صورت $x=2$ غیر ممکن است که مینیمم نسبی باشد، پس $x=2$ ریشه صورت

نیز هست. در نتیجه داریم:

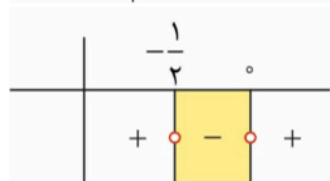
$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-2)\left(x-\frac{b}{2}\right)}{x-2} & x \neq 2 \\ b^2 + 2 & x = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x - \frac{b}{2} & x \neq 2 \\ b^2 + 2 & x = 2 \end{cases}$$

برای آنکه $x=2$ ، min نسبی تابع باشد، باید نمودار تابع به صورت زیر باشد:



$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) > f(2)$$

$$2 - \frac{b}{2} > b^2 + 2 \xrightarrow{\times 2} 4 - b > 2b^2 + 4 \Rightarrow 2b^2 + b < 0 \Rightarrow b(2b + 1) < 0$$



$$\rightarrow -\frac{1}{2} < b < 0$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۳

برای این که نمودار تابع f و خط $y=m$ در ۳ نقطه متقاطع باشند، باید m کمتر از ماکزیمم نسبی و بیشتر از مینیمم نسبی تابع باشند.

پس، از تابع f مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = -3x^2 + 12x - 9 = -3(\underbrace{x^2 - 4x + 3}_{(x-1)(x-3)}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

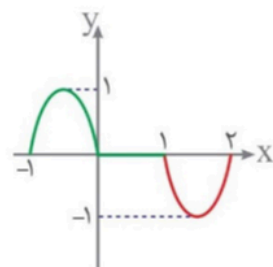
با توجه به نمودار f در صورت سؤال $x=1$ طول مینیمم نسبی و $x=3$ طول ماکزیمم نسبی است، پس:

$$\begin{cases} y_{\min} = f(1) = -1 + 6 - 9 + 1 = -3 \\ y_{\max} = f(3) = -3^2 + 6 \times 3^2 - (9 \times 3) + 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow -3 < m < 1$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۴

نمودار تابع $y = [x] \sin \pi x$ را رسم می‌کنیم:



$$y = [x] \sin \pi x = \begin{cases} -\sin \pi x & ; -1 \leq x < 0 \\ 0 & ; 0 \leq x < 1 \\ \sin \pi x & ; 1 \leq x < 2 \\ 0 & ; x = 2 \end{cases}$$

با توجه به نمودار، بیشترین مقدار تابع برابر ۱ و کمترین مقدار آن -۱ است و اختلاف آن‌ها ۲ واحد است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۵

اگر $\cos x = t$ باشد داریم: $-1 \leq t \leq 1$

$$y = \frac{\sin^2 x}{1/2 + \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\frac{5}{4} + \cos x} = \frac{1 - t^2}{\frac{5}{4} + t}$$

$$y' = \frac{-2t\left(\frac{5}{4} + t\right) - (1 - t^2)}{\left(\frac{5}{4} + t\right)^2} = \frac{-\frac{5}{2}t - 2t^2 - 1 + t^2}{\left(\frac{5}{4} + t\right)^2} = \frac{-t^2 - \frac{5}{2}t - 1}{\left(\frac{5}{4} + t\right)^2} = \frac{-\frac{1}{2}(2t^2 + 5t + 2)}{\left(\frac{5}{4} + t\right)^2}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}(2t+1)(t+2)}{\left(\frac{5}{4} + t\right)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -2 & \text{غ ق ق} \\ t_2 = -\frac{1}{2} & \text{ق ق ق} \end{cases} \rightarrow \text{مخرج} = 0 \rightarrow \left(\frac{5}{4} + t\right)^2 = 0 \rightarrow t = -\frac{5}{4} \text{ غ ق ق}$$

$$\rightarrow \begin{cases} t = \pm 1 \rightarrow y = 0 \\ t = -\frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{1 - \frac{1}{4}}{\frac{5}{4} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}} = 1 \end{cases} \text{ماکزیمم مطلق}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۶

ابتدا نقاط بحرانی ضابطه $y = x^4 - 4x$ را تعیین می‌کنیم: $x \geq 0$

$$y' = 4x^3 - 4 = 0 \Rightarrow 4(x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \Rightarrow x = 1$$

در ضمن تابع f در نقطه مرزی $x = 0$ ناپیوسته است، چون $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ است. حالا برای این که تابع f دارای ۴ نقطه بحرانی باشد، باید ضابطه پایینی دارای دو نقطه بحرانی باشد، یعنی مشتق آن دارای ۲ ریشه متمایز باشد، در ضمن چون در محدوده $x < 0$ هستیم، این دو ریشه باید دارای علامت منفی باشند.

$$x < 0: y = x^3 + mx^2 + mx + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 + 2mx + m$$

حالا باید در تابع y' سه شرط $\Delta > 0$ و $P > 0$ و $S < 0$ برقرار باشد:

$$\Delta > 0 \Rightarrow 4m^2 - 4(3)(m) > 0 \Rightarrow 4m(m-3) > 0 \Rightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 3 \end{cases}$$

$$P > 0 \Rightarrow \frac{m}{3} > 0 \Rightarrow m > 0$$

$$S < 0 \Rightarrow -\frac{2m}{3} < 0 \Rightarrow m > 0$$

از اشتراک مقادیر m نتیجه می‌گیریم $m > 3$ است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

ابتدا نقاط اکسترمم تابع f را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{\overbrace{(1)(x^2 - mx + m^2) - (2x - m)x}^{-x^2 + m^2}}{(x^2 - mx + m^2)^2} = 0 \Rightarrow x^2 = m^2$$

$$\Rightarrow x = \pm m$$

پس نقاط $A\left(m, \frac{1}{m}\right)$ و $B\left(-m, \frac{-1}{m}\right)$ دو نقطه اکسترمم نسبی تابع f هستند و فاصله آنها برابر است با:

$$|AB| = \sqrt{(m+m)^2 + \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m}\right)^2} = \sqrt{4m^2 + \frac{16}{m^2}}$$

حالا برای پیدا کردن کمترین مقدار $|AB|$ باید مشتق آن را برابر صفر قرار دهیم:

$$(AB)' = \frac{\lambda m - \frac{32}{m^3}}{2\sqrt{4m^2 + \frac{16}{m^2}}} = 0 \Rightarrow \lambda m = \frac{32}{m^3} \Rightarrow m^4 = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow m^2 = \frac{2}{3} \xrightarrow{m>0} m = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

با فرض $A(a, 0)$ و $D(b, 0)$ ، عرض نقاط B و C را پیدا می‌کنیم:

$$d_1: y - 2x - 6 = 0 \xrightarrow{x=a} y = 2a + 6 \Rightarrow B(a, 2a + 6)$$

$$d_2: 4x + 3y - 18 = 0 \xrightarrow{x=b} y = 6 - \frac{4}{3}b \Rightarrow C(b, 6 - \frac{4}{3}b)$$

حال برای این که چهارضلعی $ABCD$ مستطیل باشد، باید نقاط B و C هم‌عرض باشند:

$$2a + 6 = 6 - \frac{4}{3}b \Rightarrow a = -\frac{2}{3}b \Rightarrow b = -\frac{3}{2}a$$

رابطه مساحت مستطیل را پیدا می‌کنیم و بیشترین مقدار آن را به دست می‌آوریم:

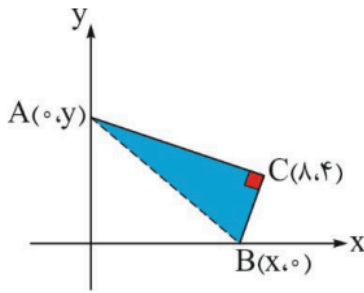
$$S = AD \times AB = (b - a) \times (2a + 6) = \left(-\frac{3}{2}a - a\right)(2a + 6)$$

$$= -\frac{5}{2}a \times (2a + 6) = -5a^2 - 15a \Rightarrow S' = -10a - 15 = 0$$

$$\Rightarrow a = -\frac{3}{2} \Rightarrow S_{\max} = -5\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 15\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{45}{4}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۹

مطابق شکل پاره‌خط‌های AC و BC بر هم عمودند، پس $m_{BC} \times m_{AC} = -1$ است:

$$\Rightarrow \frac{4-0}{8-x} \times \frac{4-y}{8-0} = -1 \Rightarrow y = 20 - 2x$$

حالا طول پاره خط AB را پیدا می‌کنیم:

$$AB = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (20 - 2x)^2} = \sqrt{5x^2 - 80x + 400}$$

$$\xrightarrow{(AB)'=0} (AB)' = \frac{10x - 80}{2\sqrt{5x^2 - 80x + 400}} = 0 \Rightarrow x = 8$$

$$AB = \sqrt{8^2 + (20 - 16)^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

به‌ازای $x = 8$ کمترین طول پاره‌خط AB به‌دست می‌آید:

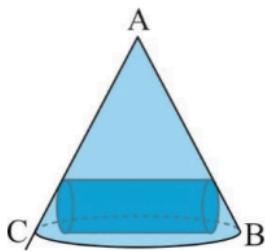
(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۰

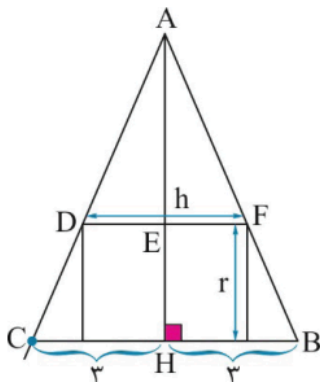
سرنخ

هدف ماکزیمم کردن حجم استوانه است ($V = \pi r^2 h$) که به شعاع و ارتفاع وابسته است پس باید حاصل ضرب ارتفاع و مجذور شعاع

بیشترین مقدار ممکن باشد.

 r = شعاع استوانه h = ارتفاع استوانه

برشی از مخروط و استوانه که رابطه‌ی بین شعاع و ارتفاع مخروط و شعاع و ارتفاع استوانه را نشان دهد.



$$\frac{AE}{AH} = \frac{EF}{HB} \rightarrow \frac{4-2r}{4} = \frac{r}{3}$$

$$\rightarrow 12 - 6r = 2rh \rightarrow h + 3r = 6$$

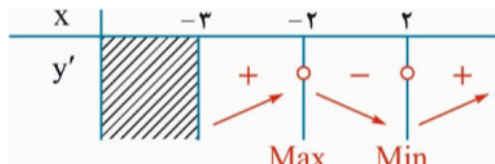
$$V = \pi r^2 h \xrightarrow{h=6-3r} V = \pi r^2 (6 - 3r)$$

$$\max V = \max(r^2(6 - 3r)) \xrightarrow{\text{مشتق}} -9r^2 + 12r = 0 \rightarrow r(-9r + 12) = 0 \rightarrow \begin{cases} r = 0 & \times \\ r = \frac{4}{3} & \checkmark \end{cases}$$

$$\rightarrow r = \frac{4}{3} \rightarrow \frac{r}{AH} = \frac{\frac{4}{3}}{4} = \frac{1}{3}$$

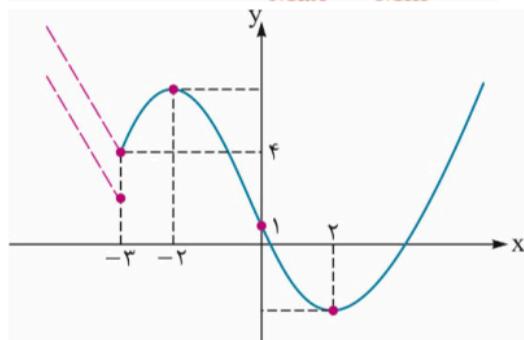
(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۱

ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را به ازای $x > -3$ رسم می‌کنیم:

$$x > -3 \rightarrow y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$$

$$y' = x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2$$



$$\max\left(-2, \frac{19}{3}\right)$$

$$\min\left(2, -\frac{13}{3}\right)$$

برای اینکه $f(x)$ دارای ۲ مینیمم نسبی باشد باید به ازای $x \leq -3$ ، خط دارای شیب منفی و همچنین $f(-3) \leq 4$ باشد:

$$x \leq -3 \rightarrow y = \frac{a}{3}x + a^2 + 2 \rightarrow f(-3) = a^2 - a + 2$$

$$\begin{cases} f(-3) \leq 4 \rightarrow a^2 - a + 2 \leq 4 \rightarrow a^2 - a - 2 \leq 0 \rightarrow -1 \leq a \leq 2 \quad (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{a}{3} < 0 \rightarrow a < 0 \quad (2) \end{cases} \xrightarrow{(1) \cap (2)} -1 \leq a < 0$$

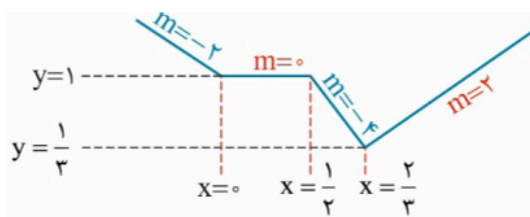
پس a شامل یک عدد صحیح است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۲

ابتدا برد $y = |x| - |2x - 1| + |3x - 2|$ را به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} x < 0 \Rightarrow (-x) - (-2x + 1) + (-3x + 2) = -2x + 1 \xrightarrow{\text{شیب}} m = -2 \\ 0 \leq x < \frac{1}{2} \Rightarrow (x) - (-2x + 1) + (-3x + 2) = 1 \Rightarrow m = 0 \\ \frac{1}{2} \leq x < \frac{2}{3} \Rightarrow (x) - (2x - 1) + (-3x + 2) = -4x + 3 \Rightarrow m = -4 \\ x \geq \frac{2}{3} \Rightarrow (x) - (2x - 1) + (3x - 2) = 2x - 1 \Rightarrow m = 2 \end{cases}$$



$$y(0) = 1$$

$$y\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

برد $|x| - |2x - 1| + |3x - 2|$ برابر $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$ می‌شود.

$$\sqrt{\left[\frac{1}{3}, +\infty\right)} = \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)} \Rightarrow \text{بیشترین مقدار} = 3 \rightarrow \text{برد تابع} = (0, 3]$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۳

اگر $x=2$ فقط ریشه مخرج تابع $y_1 = \frac{x^2 - ax + b}{x-2}$ باشد، در این صورت نمودار y_1 در همسایگی $x=2$ به صورت

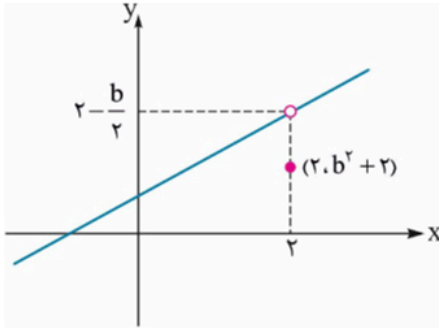


خواهد بود که در این صورت $x=2$ غیرممکن است که مینیمم نسبی باشد، پس $x=2$ ریشه صورت نیز

هست. در نتیجه داریم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-2)\left(x-\frac{b}{2}\right)}{(x-2)} & x \neq 2 \\ b^2 + 2 & x = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x - \frac{b}{2} & x \neq 2 \\ b^2 + 2 & x = 2 \end{cases}$$

برای آنکه $x=2$ ، min نسبی تابع باشد، باید نمودار تابع به صورت زیر باشد:

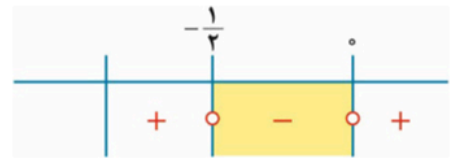


$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) > f(2)$$

$$2 - \frac{b}{2} > b^2 + 2 \xrightarrow{\times 2} 4 - b > 2b^2 + 4$$

$$\Rightarrow 2b^2 + b < 0 \Rightarrow b(2b+1) < 0$$

$$-\frac{1}{2} < b < 0$$



(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۴

سطح جانبی استوانه $S = 2\pi rh$

سطح قاعده استوانه $s = \pi r^2$

$$S + s = 12 \rightarrow 2\pi rh + \pi r^2 = 12 \rightarrow h = \frac{12 - \pi r^2}{2\pi r}$$

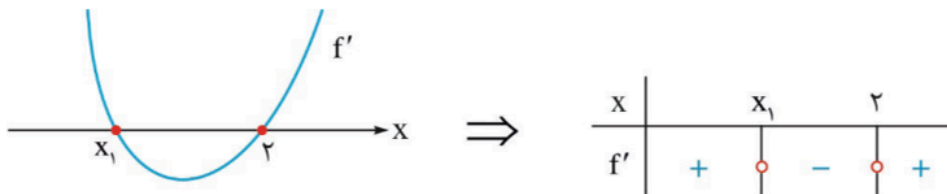
$$\text{حجم استوانه } V = \pi r^2 h = \pi r^2 \left(\frac{12 - \pi r^2}{2\pi r} \right) = r \left(6 - \frac{\pi}{2} r^2 \right) = 6r - \frac{\pi}{2} r^3$$

$$V' = 6 - \frac{3}{2} \pi r^2 = 0 \rightarrow r^2 = \frac{4}{\pi} \rightarrow r = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۵

چون تابع f در $x=2$ دارای مینیمم نسبی است. پس نمودار تابع $f'(x) = 3x^2 - 2ax + b + 2$ به صورت مقابل است:



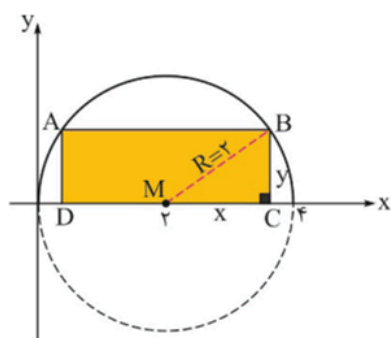
بنابراین می‌توانیم ضابطه f' را به صورت $f'(x) = 3(x-2)(x-x_1)$ در نظر بگیریم و داریم:

$$6x_1 = b + 2 \Rightarrow x_1 = \frac{b+2}{6} \xrightarrow{x_1 < 2} \frac{b+2}{6} < 2 \Rightarrow b < 10$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۶

معادله دایره C را به صورت $(x-2)^2 + y^2 = 4$ به شکل استاندارد می‌نویسیم. پس یک دایره به مرکز $M(2,0)$ و شعاع $R=2$ در اختیار داریم که محور xها یکی از قطرهای آن است و ما نیم دایره بالایی را می‌خواهیم. حالا با استفاده از قانون فیثاغورس در مثلث MBC داریم:



$$\triangle MBC: x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y = \sqrt{4 - x^2}$$

در ضمن مساحت مستطیل ABCD برابر $S = 2xy$ است و داریم:

$$S(x) = 2x\sqrt{4 - x^2} = 2\sqrt{4x^2 - x^4} \Rightarrow S'(x) = 2 \times \frac{8x - 4x^3}{2\sqrt{4x^2 - x^4}} = 0$$

$$\Rightarrow 4x(2 - x^2) = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

بنابراین بیشترین مساحت مستطیل برابر $S = 2 \times 2 = 4$ است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۷

ابتدا توجه کنید که طول نقطه‌های برخورد این دو سهمی جواب های معادله زیر هستند:

$$x^2 - 2x - 3 = -x^2 + x + 3 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 6 = 0$$

جواب های این معادله یکی $\frac{3 - \sqrt{57}}{4}$ است که منفی است و دیگری $\frac{3 + \sqrt{57}}{4}$ است که از یک بیشتر است.

اکنون توجه کنید که چون پاره خط AB موازی محور y است، پس طول نقطه‌های A و B برابر است. فرض کنید A نقطه $(t, t^2 - 2t - 3)$ و B نقطه $(t, -t^2 + t + 3)$ باشد. در این صورت

$$AB = \sqrt{(t-t)^2 + (2t^2 - 3t - 6)^2} = |2t^2 - 3t - 6|$$

$$= -2t^2 + 3t + 6, \frac{3 - \sqrt{57}}{4} \leq t \leq \frac{3 + \sqrt{57}}{4}$$

بیشترین مقدار ممکن تابع $y = -2t^2 + 3t + 6$ روی بازه $\left[\frac{3 - \sqrt{57}}{4}, \frac{3 + \sqrt{57}}{4}\right]$ به ازای $t = \frac{3}{4}$ به دست می‌آید و برابر است با:

$$-2\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3 \times \frac{3}{4} + 6 = -\frac{9}{8} + \frac{9}{4} + 6 = \frac{57}{8}$$

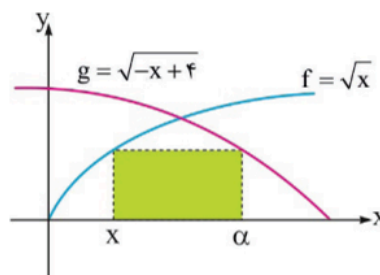
(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$f(x) = g(\alpha) \rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{-\alpha + 4} \rightarrow \alpha = 4 - x$$

$$S = (\alpha - x)(\sqrt{x}) = (4 - 2x)\sqrt{x}$$

$$S' = -2\sqrt{x} + \frac{4-2x}{2\sqrt{x}} = 0 \rightarrow \frac{4-6x}{2\sqrt{x}} = 0 \rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$S_{\max} = \left(4 - 2\left(\frac{2}{3}\right)\right)\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{4}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{9}$$



روش دوم: مختصات نقطه A واقع بر منحنی $y = \sqrt{x}$ را به صورت $(x_1, \sqrt{x_1})$ مختصات نقطه B واقع بر منحنی $y = \sqrt{-x + 4}$ را به صورت $(x_2, \sqrt{-x_2 + 4})$ در نظر می‌گیریم:

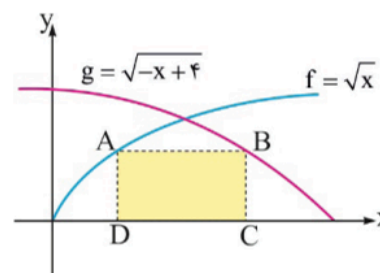
$$AD = BC \rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{-x_2 + 4} \rightarrow x_1 = -x_2 + 4$$

$$\text{مستطیل } S = AB \times AD = (x_2 - x_1)\sqrt{x_1} = (2x_2 - 4)\sqrt{4 - x_2}$$

$$\rightarrow S' = (2)\sqrt{4 - x_2} - \frac{(2x_2 - 4)}{2\sqrt{4 - x_2}} = 0 \rightarrow 2\sqrt{4 - x_2} = \frac{x_2 - 2}{\sqrt{4 - x_2}}$$

$$\rightarrow 2(4 - x_2) = x_2 - 2 \rightarrow x_2 = \frac{10}{3} \rightarrow S_{\max} = \left(\frac{20}{3} - 4\right)\sqrt{4 - \frac{10}{3}}$$

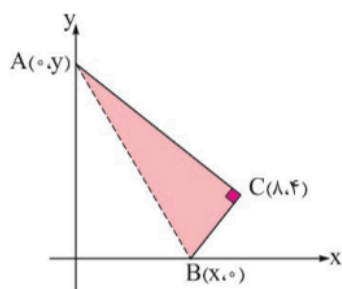
$$S_{\max} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{9}$$



(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

مطابق شکل پاره‌خط‌های AC و BC بر هم عمودند، پس $m_{BC} \times m_{AC} = -1$ است:

$$\Rightarrow \frac{4-y}{4-x} \times \frac{4-y}{4-x} = -1 \Rightarrow y = 20 - 2x$$



$$AB = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (20 - 2x)^2} = \sqrt{5x^2 - 40x + 400}$$

$$\xrightarrow{(AB)'=0} (AB)' = \frac{10x - 40}{2\sqrt{5x^2 - 40x + 400}} = 0 \Rightarrow x = 4$$

حالا طول پاره‌خط AB را پیدا می‌کنیم:

به‌ازای $x = 4$ کمترین طول پاره‌خط AB به‌دست می‌آید:

$$\min(AB) = \sqrt{5 \times (4)^2 - 40 \times (4) + 400} = \sqrt{40} = 4\sqrt{5}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۰

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x - \frac{1}{2})^2}{2x - \frac{1}{4}}, & x \geq \frac{1}{4} \\ 4x^2 + 4x - 1, & x < \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{4})}{(2x - \frac{1}{4})^2}, & x > \frac{1}{4} \\ 8x + 4, & x < \frac{1}{4} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'	-	-	+	-	+
y		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		min نسبی	max نسبی	min نسبی	

$$\Rightarrow \text{مثلث} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{1}{4} & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$S = \frac{1}{2} \left| -\frac{1}{8} - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right| = \frac{3}{8}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۱

f' در $x = -1$ ریشه مضاعف دارد یعنی در تجزیه f' باید $(x+1)^2$ داشته باشیم:

$$f'(x) = 4x^2 - 2x^2 + 2ax + b = (x+1)^2(4x+b)$$

با توجه به جملات $4x^3, b, 4x^2$ ، پرانتز دوم را $4x+b$ انتخاب کردیم.

ضریب x^2 در این عبارت را حساب کنیم:

و باید ۳- شود. پس $b = -11$ و بنابراین ریشه دیگر مشتق $-\frac{b}{4} = \frac{11}{4}$ است.

با قرار دادن $f'(-1) = 0$ داریم:

$$-4 - 3 - 2a - 11 = 0 \Rightarrow a = -9$$

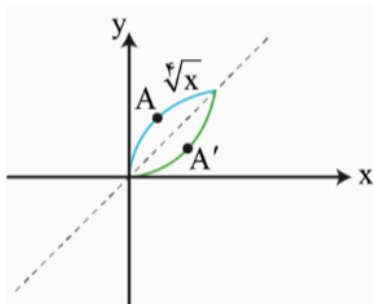
$$f''(x) = 12x^2 - 6x + 2a$$

حالا:

$$f''\left(\frac{11}{4}\right) = 12\left(\frac{121}{16}\right) - 6\left(\frac{11}{4}\right) + 2(-9) = 1452 = \frac{363}{4} - \frac{66}{4} - 18 = \frac{225}{4}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۲



$$A(x, \sqrt[4]{x}) \Rightarrow A'(\sqrt[4]{x}, x)$$

$$AA' = \sqrt{(x - \sqrt[4]{x})^2 + (x - \sqrt[4]{x})^2} = 2|\sqrt[4]{x} - x|$$

$$\xrightarrow{0 < x < 1} = 2(\sqrt[4]{x} - x)$$

$$\text{مشتق: } 2\left(\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} - 1\right) = 0 \Rightarrow \sqrt[4]{x^3} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{4}{3}} = 2^{-\frac{4}{3}}$$

پس:

$$AA'_{\max} = 2\left(\sqrt[4]{2^{-\frac{4}{3}}} - 2^{-\frac{4}{3}}\right) = 2\left(2^{-\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{4}{3}}\right) = 2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{2} - \frac{\sqrt[3]{2}}{4} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{4}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: ریشه‌های ساده داخل قدرمطلق، طول نقاط زاویه‌دار (گوشه‌ای) هستند که تابع در آن‌ها مشتق ناپذیر است؛ پس جزء نقاط بحرانی تابع هستند.

$$2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

گام دوم: مشتق در ریشه عبارت زیر رادیکال بی‌نهایت می‌شود (مشتق در آن وجود ندارد)، پس ریشه عبارت زیر رادیکال هم جزء نقاط بحرانی است.

$$|x| = 0 \Rightarrow x = 0$$

گام سوم: با محدوده‌بندی بر روی x ، قدرمطلق را در هر محدوده برداشته و از تابع مشتق می‌گیریم. ریشه‌های معادله $f'(x) = 0$ سایر نقاط بحرانی را در صورت وجود مشخص خواهند کرد.

$$x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}: f(x) = 2x^2 - 1 + \sqrt{-x} \Rightarrow f'(x) = 4x - \frac{1}{2\sqrt{-x}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{8x\sqrt{-x} - 1}{2\sqrt{-x}} = 0 \Rightarrow 8x\sqrt{-x} = 1 \xrightarrow{x \leq 0} \text{ریشه ندارد.}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} < x \leq 0: f(x) = -2x^2 + 1 + \sqrt{-x} \Rightarrow f'(x) = -4x - \frac{1}{2\sqrt{-x}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-8x\sqrt{-x} - 1}{2\sqrt{-x}} = 0 \Rightarrow -8x\sqrt{-x} = 1 \xrightarrow{\text{توان 2}} -64x^3 = 1 \Rightarrow x^3 = -\frac{1}{64} \Rightarrow x = -\frac{1}{4} \checkmark$$

$$0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}: f(x) = -2x^2 + 1 + \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = -4x + \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-8x\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow -8x\sqrt{x} = -1 \Rightarrow x\sqrt{x} = \frac{1}{8} \xrightarrow{\text{توان 2}} x^3 = \frac{1}{64} \Rightarrow x = \frac{1}{4} \checkmark$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x: f(x) = 2x^2 - 1 + \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = 4x + \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow \frac{8x\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow 8x\sqrt{x} = -1 \xrightarrow{x \geq 0} \text{ریشه ندارد.}$$

گام چهارم: پس در کل پنج نقطه بحرانی به طول‌های $\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\}$ داریم.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: ابتدا تابع $y = (f \times g)(x)$ را تشکیل می‌دهیم.

$$y = f(x) \times g(x) = (x+a) \times \frac{x}{x^2+x+1} = \frac{x^2+ax}{x^2+x+1}$$

گام دوم: مشتق y را حساب می‌کنیم.

$$y' = \frac{(2x+a)(x^2+x+1) - (x^2+ax)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} \Rightarrow y' = \frac{\cancel{2x^3} + ax^2 + 2x^2 + ax + 2x + a - \cancel{2x^3} - x^2 - 2ax^2 - ax}{(x^2+x+1)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{(1-a)x^2 + 2x + a}{(x^2+x+1)^2}$$

گام سوم: برای آن که تابع فقط یک نقطهٔ اکسترمم نسبی داشته باشد، باید معادلهٔ $y' = 0$ فقط یک ریشهٔ ساده داشته باشد که در آن تغییر علامت دهد؛ در نتیجه معادلهٔ $(1-a)x^2 + 2x + a = 0$ باید از درجهٔ یک باشد و ضریب x^2 باید صفر باشد؛ پس: $1-a=0 \Rightarrow a=1$

$$\Rightarrow y' = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} = 0 \Rightarrow 2x+1=0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

x	$-\frac{1}{2}$
y'	$\begin{array}{c} - \\ \searrow \quad \nearrow \\ \text{min} \end{array}$

توجه کنید که معادلهٔ درجه‌دو در هیچ حالتی نمی‌تواند فقط یک ریشهٔ ساده داشته باشد.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: مختصات نقطه اکسترمم تابع در تابع صدق می کند، یعنی $f(2) = 3$ است.

$$f(2) = 2a + \frac{b}{2-1} = 3 \Rightarrow 2a + b = 3 \quad (1)$$

گام دوم: در تابع مشتق پذیر f ، $x = 2$ طول نقطه اکسترمم است؛ پس باید $f'(2) = 0$ باشد. مشتق تابع را حساب می کنیم و مقدار آن را در $x = 2$ برابر صفر قرار می دهیم.

$$f(x) = ax + \frac{b}{x-1}$$

$$f'(x) = a - \frac{b}{(x-1)^2} \xrightarrow{f'(2)=0} a - \frac{b}{(2-1)^2} = 0 \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b \quad (2)$$

گام سوم: از (۱) و (۲) نتیجه می گیریم:

$$\begin{cases} a = b \\ 2a + b = 3 \Rightarrow 3a = 3 \Rightarrow a = b = 1 \end{cases}$$

در نتیجه:

$$f(x) = x + \frac{1}{x-1}, \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$$

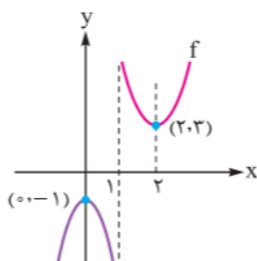
گام چهارم: ریشه های معادله $f'(x) = 0$ را به دست می آوریم و سپس آن ها را در تابع قرار می دهیم تا نقاط اکسترمم نسبی تابع به دست آیند:

$$1 - \frac{1}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 1 \Rightarrow x-1 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \Rightarrow f(2)=3 \\ x=0 \Rightarrow f(0)=-1 \end{cases}$$

گام پنجم: با تعیین علامت تابع f' ، رفتار تابع را بررسی می کنیم.

x	0	1	2
f'	+	-	-
f	↗	↘	↗
	max	min	

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

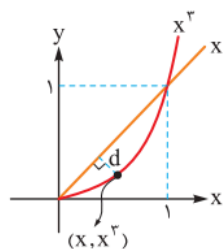


گام ششم: با توجه به جدول تعیین علامت f' ، نمودار تابع f را رسم می کنیم.

مطابق نمودار، برد تابع f شامل اعداد صحیح ۱، ۲ و ۰ نیست.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: شکل سؤال را رسم می‌کنیم. مختصات نقطه روی منحنی $y = x^3$ را به صورت (x, x^3) در نظر می‌گیریم ($0 \leq x \leq 1$).



گام دوم: می‌خواهیم بیشترین فاصله نقاط تابع $y = x^3$ را در محدوده $0 \leq x \leq 1$ از خط $y = x$ به دست آوریم. رابطه اصلی را می‌نویسیم.

خط: $x - y = 0$

$$\text{رابطه اصلی: } d = \frac{|x - y|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|x - y|}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

گام سوم: رابطه کمکی در این سؤال $y = x^3$ است.

گام چهارم: رابطه کمکی را در رابطه اصلی جای گذاری می‌کنیم.

$$d(x) = \frac{\overbrace{|x - x^3|}^{\geq 0}}{\sqrt{2}} \xrightarrow[x^3 \leq x \Rightarrow 0 \leq x - x^3]{0 \leq x \leq 1} d(x) = \frac{x - x^3}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

گام پنجم: از رابطه (۲) مشتق می‌گیریم و ریشه(های) $d'(x) = 0$ را به دست می‌آوریم.

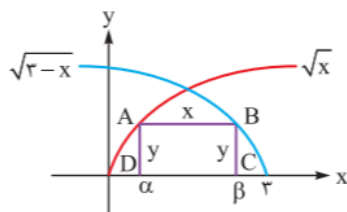
$$d'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} x^2 \xrightarrow{d'(x)=0} \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \xrightarrow{0 \leq x \leq 1} x = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (3)$$

گام ششم: از رابطه (۳) در رابطه (۲) جای گذاری می‌کنیم تا بیشترین مقدار d به دست آید.

$$d_{\max} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - (\frac{\sqrt{3}}{3})^3}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{9\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{9}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: شکل سؤال را رسم می‌کنیم. توجه کنید که برای رسم نمودار تابع $g(x) = \sqrt{3-x}$ ، کافی است ابتدا نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را سه واحد به چپ منتقل کنید تا نمودار $y = \sqrt{3+x}$ به دست آید، سپس نمودار را نسبت به محور y ها قرینه کنید تا نمودار تابع $y = \sqrt{3-x}$ به دست آید.



در مستطیل $ABCD$ ، طول نقطه D را α و طول نقطه C را β در نظر می‌گیریم، پس $A(\alpha, \sqrt{\alpha})$ ، $D(\alpha, 0)$ ، $C(\beta, 0)$ و $B(\beta, \sqrt{3-\beta})$ است. از آنجا که $ABCD$ مستطیل است، پس $AD = BC$ ، در نتیجه: طبق شکل باید $y_A = y_B$ باشد؛ پس:

$$\sqrt{\alpha} = \sqrt{3-\beta} \Rightarrow \alpha = 3-\beta \Rightarrow \beta = 3-\alpha$$

گام دوم: می‌خواهیم مساحت مستطیل بیشترین مقدار باشد؛ پس رابطه اصلی، مربوط به مساحت مستطیل است. (۱) $S = xy$: رابطه اصلی

گام سوم: مقادیر x و y را با توجه به گام اول برحسب α به دست می‌آوریم. ارتباط x و y با α روابط کمکی ما در این مرحله هستند.

$$\begin{cases} x = \beta - \alpha = 3 - \alpha - \alpha = 3 - 2\alpha & (2) \\ y = \sqrt{\alpha} & (3) \end{cases} \text{ روابط کمکی}$$

گام چهارم: از روابط کمکی در تساوی (۱) جای‌گذاری می‌کنیم تا مساحت برحسب α به دست آید.

$$\xrightarrow{(1) \text{ و } (2) \text{ و } (3)} S(\alpha) = (3-2\alpha)(\sqrt{\alpha}) = 3\sqrt{\alpha} - 2\alpha\sqrt{\alpha} \quad (4)$$

گام پنجم: از رابطه (۴) مشتق می‌گیریم و ریشه‌های $S'(\alpha) = 0$ را به دست می‌آوریم.

$$S(\alpha) = 3\alpha^{\frac{1}{2}} - 2\alpha^{\frac{3}{2}}$$

$$S'(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha^{-\frac{1}{2}} - 3\alpha^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2\sqrt{\alpha}} - 3\sqrt{\alpha} \xrightarrow{S'(\alpha)=0} \frac{3}{2\sqrt{\alpha}} - 3\sqrt{\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\alpha} \Rightarrow 2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

گام ششم: مقدار $\alpha = \frac{1}{2}$ را در (۴) قرار می‌دهیم تا $S_{\max}$ به دست آید.

$$S_{\max} = 3\sqrt{\frac{1}{2}} - 2 \times \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: می‌خواهیم ماکزیمم $A = |a - b|$ را به دست آوریم؛ پس رابطه اصلی به صورت زیر است:

$$A = |a - b| \quad (۱)$$

گام دوم: باید عبارت (۱) را برحسب یک متغیر بنویسیم تا بتوانیم از آن مشتق بگیریم. از تساوی‌های داده‌شده در صورت سؤال به عنوان رابطه کمکی استفاده می‌کنیم.

$$a + b + c = 2 \Rightarrow a + b = 2 - c \quad (۲)$$

$$ab + bc + ca = 1 \Rightarrow ab + c(\underbrace{a+b}_{2-c}) = 1 \xrightarrow{(۲)} ab + c(2-c) = 1 \Rightarrow ab = 1 - 2c + c^2 \quad (۳)$$

از اتحادها می‌دانیم:

$$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab \xrightarrow{(۲) \text{ و } (۳)} (a-b)^2 = (2-c)^2 - 4(1-2c+c^2) = 4 - 4c + c^2 - 4 + 8c - 4c^2$$

$$\Rightarrow (a-b)^2 = -3c^2 + 4c \xrightarrow{\text{جذر}} |a-b| = \sqrt{-3c^2 + 4c} \xrightarrow{(۱)} A(c) = \sqrt{-3c^2 + 4c} \quad (۴)$$

گام سوم: از (۴) مشتق می‌گیریم و ریشه‌های $A'(c) = 0$ را به دست می‌آوریم.

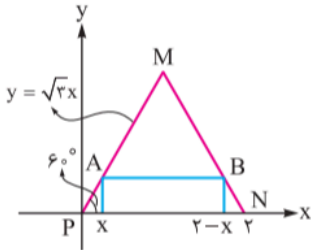
$$A'(c) = \frac{-6c + 4}{2\sqrt{-3c^2 + 4c}} = \frac{-3c + 2}{\sqrt{-3c^2 + 4c}} \xrightarrow{A'(c)=0} -3c + 2 = 0 \Rightarrow c = \frac{2}{3}$$

گام چهارم: مقدار $c = \frac{2}{3}$ را در (۴) قرار می‌دهیم تا $A_{\max}$ به دست آید.

$$A_{\max} = \sqrt{-3\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{2}{3}\right)} = \sqrt{-\frac{4}{3} + \frac{8}{3}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

پاسخ تشریحی گام اول: مطابق شکل زیر، مثلث را در دستگاه مختصات قرار می‌دهیم. اگر طول رأس A را x در نظر بگیریم، طول رأس B برابر با $2-x$ می‌شود.



گام دوم: معادله ضلعی از مثلث که از مبدأ عبور می‌کند و با جهت مثبت محور x زاویه 60° می‌سازد، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y = (\tan 60^\circ)x \Rightarrow y = \sqrt{3}x$$

$$A(x, \sqrt{3}x)$$

رأس A بر روی این خط است؛ پس:

گام سوم: مساحت مستطیل را می‌نویسیم:

$$S = \overbrace{(2-x-x)}^{2-2x} \times \sqrt{3}x = -2\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{3}x$$

گام چهارم: از S نسبت به x مشتق می‌گیریم و مساوی صفر قرار می‌دهیم تا طول نقطه بحرانی به دست آید:

$$S'(x) = -4\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} \xrightarrow{S'=0} -4\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

گام پنجم: ماکزیمم مساحت به ازای $x = \frac{1}{2}$ به دست می‌آید:

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

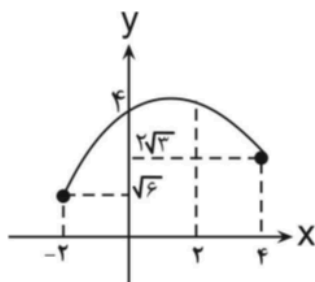
(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$g(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{2x+4}, \quad D_g = [-2, 4], \quad \begin{cases} g(-2) = \sqrt{6} \\ g(4) = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$g'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{4-x}} + \frac{1}{\sqrt{2x+4}} \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{2x+4} = 2\sqrt{4-x}$$

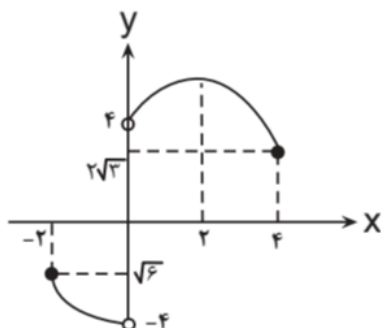
$$\Rightarrow 2x+4 = 16-4x \Rightarrow 6x = 12 \Rightarrow x = 2 \rightarrow g(2) = 2\sqrt{2}$$

نمودار تابع g به صورت زیر است:



نمودار تابع f به صورت زیر است:

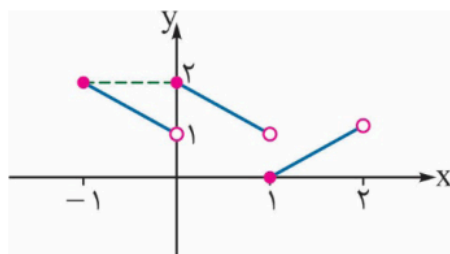
$$f(x) = \begin{cases} g(x) & x > 0 \\ -g(x) & x < 0 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \text{نقاط بحرانی: } \{-2, 2, 4\}$$

توجه کنید که $x = 0$ عضو دامنه تابع f نیست؛ بنابراین بحرانی نیست.

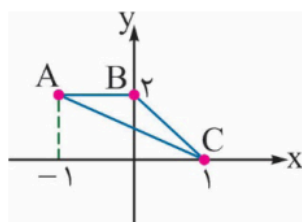
(قلمچی ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)



با توجه به دامنه تابع، ضابطه تابع را به صورت یک تابع چند ضابطه‌ای می‌نویسیم

$$1 - [x]^2 \geq 0 \rightarrow |[x]| \leq 1 \rightarrow -1 \leq [x] \leq 1 \rightarrow -1 \leq x < 2$$

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & -1 \leq x < 0 \\ 2-x & 0 \leq x < 1 \\ x-1 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$



$$AB = 1$$

$$BC = \sqrt{2}$$

$$AC = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}$$

$$P_{ABC} = \sqrt{8} + \sqrt{2} + 1$$

با توجه به شکل نقاط $(-1, 2)$ و $(0, 2)$ و $(1, 0)$ بحرانی‌اند.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

ابتدا دامنه تابع را می‌یابیم: $1 - x^2 \geq 0 \rightarrow 1 \geq x^2 \rightarrow 1 \geq |x| \Rightarrow D_f$

حال از تابع مشتق گرفته و نقاط بحرانی آن را در بازه $[-1, 1]$ پیدا می‌کنیم:

$$f'(x) = 4\sqrt{1-x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} (4x)$$

$x = \pm 1$ هم مشتق را تعریف نشده می‌کنند و هم نقاط ابتدا و انتهای دامنه‌اند، پس بحرانی هستند از طرفی از عمل $f'(x) = 0$ داریم:

x	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
f(x)	0	-2 min مطلق	2 max مطلق	0

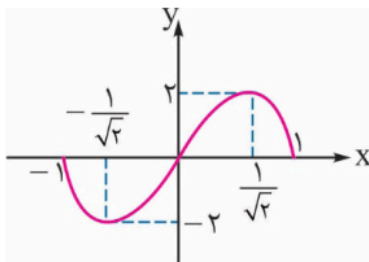
$$4\sqrt{1-x^2} = \frac{4x(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\cancel{4}\sqrt{1-x^2} = \frac{\cancel{4}x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 1-x^2 = x^2 \rightarrow 2x^2 = 1 \rightarrow x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y_{\max} - y_{\min} = 2 - (-2) = 4$$

برای درک بهتر شکل تابع را هم رسم می‌کنیم:



$$f(x) = 4x\sqrt{1-x^2}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۵۳

ابتدا اکستریم‌های نسبی تابع $g(x)$ را پیدا می‌کنیم. اما اول باید نقاط بحرانی $g(x)$ را بیابیم. یعنی:

$$g(x) = \frac{x^2 - 2x - 7}{x^2 - 2x + 5} \rightarrow D_g \in \mathbb{R} \rightarrow g(x) = \frac{(x-1)^2 - 8}{(x-1)^2 + 4} \rightarrow g'(x) = \frac{(1 \times 4 + 1 \times 8) \times 2(x-1)}{\left((x-1)^2 + 4\right)^2} = \frac{24(x-1)}{\left((x-1)^2 + 4\right)^2}$$

$$\rightarrow g'(x) = 0 \rightarrow x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \text{ نقطه بحرانی}$$

حال جدول تغییرات برای این نقطه بحرانی را رسم می‌کنیم:

x	1	
y'	-	+
y		

متوجه می‌شویم که $x = 1$ نقطه min نسبی تابع $g(x)$ بوده و مقدار آن برابر است با:

$$g(1) = \frac{-8}{4} = -2$$

حال چون طبق گفته سوال، اکستریم‌های دو تابع f و g بر هم منطبق اند، پس می‌توان گفت که $x = 1$ ، هم بحرانی تابع f بوده و هم مقدار آن برابر -2 است. به عبارت دیگر:

$$f'(1) = 0, f(1) = -2$$

$$f(x) = \frac{x^2 - ax}{2x + b} \rightarrow f'(x) = \frac{(2x - a)(2x + b) - (2)(x^2 - ax)}{(2x + b)^2} \Rightarrow f'(1) = 0$$

$$\rightarrow (2 - a)(2 + b) - 2(1 - a) = 0 \rightarrow 4 + 2b - 2a - ab - 2 + 2a = 0 \rightarrow \boxed{2b - ab = -2}$$

$$f(1) = -2 \Rightarrow \frac{1 - a}{2 + b} = -2 \rightarrow 1 - a = -4 - 2b \rightarrow 2b - a = -5$$

$$\begin{cases} 2b - ab = -2 \rightarrow b(2 - a) = -2 \\ 2b - a = -5 \rightarrow 2b = -5 + a \end{cases} \Rightarrow 2b(2 - a) = -4 \rightarrow (a - 5)(2 - a) = -4$$

$$\rightarrow 2a - a^2 - 10 + 5a = -4 \rightarrow -a^2 + 7a - 6 = 0 \rightarrow a^2 - 7a + 6 = 0 \quad \begin{cases} a = 2 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \rightarrow b = -2 & \times \\ a = 6 \rightarrow b = \frac{1}{2} & \checkmark \end{cases} \end{cases}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

تابع f روی دامنه خود پیوسته و مشتق‌پذیر است. از صورت سوال نتیجه گرفته می‌شود که مشتق تابع f در $x = 2$ برابر صفر است:

$$f'(x) = \frac{2x}{4} - \frac{a}{2\sqrt{x+2}} = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{x+2}} \Rightarrow x\sqrt{x+2} = a \xrightarrow{\text{بم توان ۲}} x^2(x+2) = a^2 \quad \begin{cases} 4 \times 4 = a^2 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4 \end{cases}$$

بررسی $a = 4$:

$$x^2 + 2x^2 = 16 \Rightarrow x^2 + 2x^2 - 16 = (x-2)(x^2 + 4x + 8)$$

عبارت $x^2 + 4x + 8$ چون $\Delta < 0$ دارد، ریشه ندارد.

x	2	
f'(x)	-	+
	0	

تابع در $[2, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

توجه داشته باشید که مقدار a با توجه به بازه x مثبت است و $a = -4$ قبول نیست.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵۴

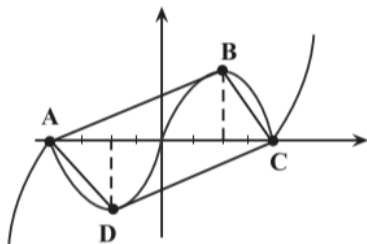
۵۵

مطابق شکل، نمودار تابع در فاصله بین ریشه‌ها قسمتی از نمودار یک تابع درجه دوم است. نقاط **Max** و **Min** دقیقاً در وسط ریشه‌ها واقع می‌شوند و عرض آنها هم ± 4 است.

کافیست مساحت مثلث **ABC** را دو برابر کنیم:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{4 \times 8}{2} = 16$$

مساحت چهارضلعی **ABCD**: $16 \times 2 = 32$



(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵۶

برای آنکه تکلیف $[\cos x]$ را روشن کنیم باید x را در ناحیه‌های مختلف مثلثاتی جداگانه و همچنین مرز بین ناحیه‌ها را نیز جداگانه بررسی کنیم.

$$-\frac{\pi}{2} < x < 0 \xrightarrow{[\cos x]=0} f(x) = x^2 \quad x=0 \Rightarrow f(x) = -1$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \xrightarrow{[\cos x]=0} f(x) = x^2 \quad x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi \xrightarrow{[\cos x]=-1} f(x) = x^2 + 1$$

$$x = \pi \Rightarrow f(x) = x^2 + 1 \quad \pi < x < \frac{3\pi}{2} \xrightarrow{[\cos x]=-1} f(x) = x^2 + 1$$

این تابع ماکزیمم نسبی ندارد و در $x=0$ می‌نیمم نسبی دارد.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵۷

با توجه به دامنه $f(x) = -\frac{1}{44}x$ از آن مشتق می‌گیریم و ریشه یا ریشه‌های آن را پیدا می‌کنیم.

$$f(x) = -\frac{1}{44}x + \sqrt{9+6x} \longrightarrow f'(x) = -\frac{1}{44} + \frac{6}{2\sqrt{9+6x}} = 0$$

$$\sqrt{9+6x} = \frac{3}{5} \rightarrow 9+6x = \frac{9}{25} \rightarrow 6x = \frac{9}{25} - 9 = 9\left(\frac{-24}{25}\right) \quad x = \frac{9 \times (-24)}{25 \times 6} = -1/44$$

x	-1/44
f'(x)	+
f(x)	↗

پس اکسترمم نسبی از نوع ماکزیمم است و طول آن $x = -1/44$ است.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵۸

نقطه اکسترمم نسبی تابع f ، زمانی روی محور طول‌ها است که معادله تقاطع $f(x) = 0$ ریشه مضاعف داشته باشد.

$$\frac{x^2 + ax + 9}{x^2 + x + 3} = 0 \rightarrow x^2 + ax + 9 = 0 \rightarrow \Delta = 0 \rightarrow a^2 - 36 = 0 \rightarrow a = \pm 6$$

اکنون از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = \frac{(2x+a)(x^2+x+3) - (2x+1)(x^2+ax+9)}{(x^2+x+3)^2} = \frac{(1-a)x^2 - 12x + (3a-9)}{(x^2+x+3)^2}$$

به ازای $a = 6$ داریم:

$$f'(x) = \frac{-5x^2 - 12x + 9}{(x^2+x+3)^2}$$

x	-3	3/5
f'	-	+
f'	↘	↗

min

به ازای $a = -6$ داریم:

$$f'(x) = \frac{7x^2 - 12x - 27}{(x^2+x+3)^2}$$

x	-9/7	3
f'	+	-
f'	↗	↘

min

هر دو جواب برای a قابل قبول هستند.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵۹

$$f' = \begin{cases} a & , \quad x < 2 \\ 2x - c & , \quad x > 2 \end{cases}$$

باید تابع در $x = 2$ مشتق پذیر بوده و ریشه مشتق در ضابطه پایین، بیرون دامنه آن باشد.

$$f' = 0 \Rightarrow x = \frac{c}{2} < 2 \Rightarrow c < 4 \Rightarrow c_{\max} = 3$$

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & , \quad x < 2 \\ x^2 - 3x + 1 & , \quad x \geq 2 \end{cases} \quad \text{پس: } x = 2 \text{ که شرط پیوستگی در}$$

$$2(2) - 3 = a$$

به صورت $2a + b = -1$ در می آید و از تساوی مشتق های راست و چپ در $x = 2$ داریم:

$$a - b = 4 \quad \text{پس } a = 1 \text{ و } b = -3 \text{ و بنابراین:}$$

توجه: اگر $c = 4$ باشد، در این صورت از شرط $f'_+(2) = f'_-(2)$ نتیجه می شود که $a = 0$ ؛ که در آن صورت ضابطه بالایی تابع f یک خط افقی می شود و بی شمار نقطه بحرانی دارد!

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$y' = \begin{cases} 2x^2 - 12 & , \quad x > 0 \\ 2x^2 - 3 & , \quad x < 0 \end{cases} \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 ; x = 2 \\ x < 0 ; x = -1 \end{cases}$$

x		-1	0	2	
y'	+		-		+
y		3	6	-1	
		max نسبی	b	min نسبی	

پس $x = 0$ باید هیچ نوع اکسترممی نباشد پس:

$$b = 2, 3, 4, 5$$

$$\Rightarrow 2 + 3 + 4 + 5 = 14$$

عرض از مبدا ضابطه بالایی برابر ۶ و عرض از مبدا ضابطه پایینی برابر با ۱ است؛ در نتیجه مقادیر صحیح b در بازه $(1, 6)$ می باشند:

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$D_f = (0, 1]$$

ابتدا دامنه تابع $f(x)$ را مشخص می کنیم:

سپس تابع $f(x)$ را ساده می کنیم تا مشتق گرفتن راحت تر شود:

$$f(x) = x\sqrt{\frac{1-x}{x}} = \sqrt{x^2 \times \frac{(1-x)}{x}} = \sqrt{x(1-x)} = \sqrt{x-x^2} \quad f'(x) = \frac{1-2x}{2\sqrt{x(1-x)}} = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

همواره مثبت

	0	$\frac{1}{2}$	1	
f'	تن	+	-	تن
f		↗	↘	

پس تابع f ابتدا صعودی سپس نزولی است.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + 2 = -2x + 1 \rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -2x - 1 \rightarrow f'(x) = (-2x - 1)f(x)$$

نقاط بحرانی $f'(x)$ در نقاطی رخ می دهد که $f''(x) = 0$ یا $f''(x)$ وجود نداشته باشد.

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} f''(x) = -2 \times f(x) + (-2x - 1) \underbrace{f'(x)} = f(x)(-2 + (2x + 1)) \rightarrow f''(x) = 0 \rightarrow f(x)(-2 + (2x + 1))^2 = 0$$

$(-2x - 1)f(x)$

$$\xrightarrow{f(x) \neq 0} (2x + 1)^2 = 2 \rightarrow 4x^2 + 4x - 1 = 0 \quad S = x_1 + x_2 = -\frac{4}{4} = -1$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۶۰

۶۱

۶۲

۶۳

برای اینکه تابع $f(x)$ در بازه $x \in [0, +\infty)$ همواره اکیداً صعودی باشد باید مقدار مشتق آن در این بازه همواره مثبت باشد. یادآوری: برای تابع هموگرافیک داریم

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} \quad f(x) = \frac{mx-2}{3x-(m+1)} \Rightarrow f'(x) = \frac{-m(m+1)+6}{(3x-(m+1))^2} = \frac{-m^2-m+6}{(3x-(m+1))^2} = \frac{-(m+3)(m-2)}{(3x-(m+1))^2}$$

همواره مثبت

$$\frac{m}{f'(x)} \left| \begin{array}{ccc} - & + & - \\ - & + & - \end{array} \right| \Rightarrow -3 < m < 2 \quad (I)$$

از طرفی برای اینکه تابع f در بازه $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی باشد باید ریشه مخرج $(x = \frac{m+1}{3})$ کوچکتر از صفر باشد پس داریم:

$$\frac{m+1}{3} < 0 \Rightarrow m < -1 \quad (II)$$

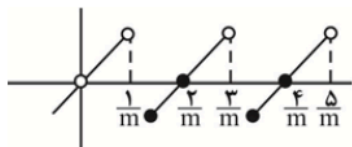
از اشتراک دو بازه (I) و (II) داریم: $-3 < m < -1$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۶۴

نمودار این تابع به صورت زیر است، لذا نقاط بحرانی این تابع در مضارب فرد $\frac{1}{m}$ اتفاق می‌افتد. لذا پانزدهمین نقطه بحرانی در $x = \frac{29}{m}$ اتفاق می‌افتد پس باید $x = \frac{29}{m}$ کمتر از ۸

و شانزدهمین نقطه بحرانی یعنی $x = \frac{31}{m}$ بزرگتر یا مساوی ۸ باشد.



$$\frac{29}{m} < 8 \Rightarrow \frac{29-8m}{m} < 0 \Rightarrow m < 0 \text{ یا } m > \frac{29}{8} \quad (1)$$

$$\frac{31}{m} \geq 8 \Rightarrow \frac{31-8m}{m} \geq 0 \Rightarrow 0 < m \leq \frac{31}{8} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2),(1)} \frac{29}{8} < m \leq \frac{31}{8} \Rightarrow 3/625 < m \leq 3/875$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۶۵

ابتدا $|x^2 - 9|$ را تعیین علامت می‌کنیم:

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \quad \begin{array}{c|ccc} x & & -3 & 3 & \\ \hline x^2-9 & & + & - & + \end{array} \quad |x^2 - 9| = \begin{cases} x^2 - 9 & x \geq 3 \text{ یا } x \leq -3 \\ -x^2 + 9 & -3 < x < 3 \end{cases}$$

حال تابع $f(x)$ را مشخص می‌کنیم و از آن مشتق گرفته و برای یافتن اکسترم‌های نسبی، $f'(x)$ را مساوی صفر قرار می‌دهیم و جدول تعیین علامت $f'(x)$ را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = x|x^2 - 9| = \begin{cases} x^3 - 9x & , x \geq 3 \text{ یا } x \leq -3 \\ -x^3 + 9x & , -3 < x < 3 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 9 & x > 3 \text{ یا } x < -3 \\ -3x^2 + 9 & -3 < x < 3 \end{cases}$$

قابل قبول نیست $\Rightarrow 3x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow -3x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

x	$-\infty$	-3	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	-	+	
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
		max	min	max	min	

طول نقاط ماکزیمم نسبی: $\{-3, \sqrt{3}\}$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۶۶

تابع در $x = 0$ مماس افقی دارد. یعنی $f'(0) = 0$

$$f(x) = x^4 + 2ax^3 + bx \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 6ax^2 + b = 0 \xrightarrow{x=0} b = 0$$

$$A(-4, 0) \xrightarrow{\text{جاگذاری}} (-4)^4 + 2(-4)^3 a = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$f(x) = x^4 + 4x^3 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 12x^2 = 4x^2(x+3) = 0 \quad x = 0, x = -3$$

$$f(-3) = (-3)^4 + 4(-3)^3 \Rightarrow m = -27 \quad \frac{a+b+1}{m} = \frac{2+0+1}{-27} = -\frac{3}{27} = -\frac{1}{9}$$



(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۶۷

دامنه این تابع از حل نامعادله $-2x^2 - 3x + 5 \geq 0$ بدست می‌آید، پس داریم:

$$f'(x) = k + \frac{-4x-3}{2\sqrt{-2x^2-3x+5}} \Rightarrow f'(\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow k + \frac{-2-3}{2\sqrt{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+5}} = 0 \Rightarrow k = \frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$$

باشد: $f'(\frac{1}{2}) = 0$ با توجه به فرض مساله باید $Df = [-\frac{5}{2}, 1]$

حال برای یافتن برد این تابع پیوسته، کافی است فقط ماکزیمم و مینیمم مطلق آن را محاسبه کنیم. پس به سراغ یافتن نقاط بحرانی خواهیم رفت. ابتدا ریشه‌های مشتق تابع را می‌یابیم:

$$f'(x) = \frac{5\sqrt{3}}{6} - \frac{4x+3}{2\sqrt{-2x^2-3x+5}} = 0 \Rightarrow 5\sqrt{3}\sqrt{-2x^2-3x+5} = 12x+9$$

$$\xrightarrow{\text{بم توان ۲}} ۲۵ \times ۳(-2x^2-3x+5) = ۱۴۴x^2 + ۲۱۶x + ۸۱ \Rightarrow ۲۹۴x^2 + ۴۴۱x - ۲۹۴ = 0$$

با توجه به اینکه یکی از ریشه‌های این معادله را از قبل می‌دانیم ($x = \frac{1}{2}$) برای یافتن ریشه دوم کافی است از رابطه ضرب ریشه‌ها استفاده کنیم.

$$\alpha \times \beta = \frac{-294}{294} \xrightarrow{\alpha = \frac{1}{2}} \frac{1}{2} \times \beta = -1 \Rightarrow \beta = -2$$

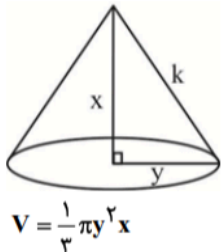
ولی این ریشه در معادله $f'(x) = 0$ صادق نیست. حال مقدار f را در نقاط $x = -\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 1$ بدست می‌آوریم:

$$f(-\frac{5}{2}) = \frac{-25\sqrt{3}}{12} \quad f(\frac{1}{2}) = \frac{17\sqrt{3}}{12} \quad f(1) = \frac{5\sqrt{3}}{6}$$

بنابراین برد تابع به صورت $\left[\frac{-25\sqrt{3}}{12}, \frac{17\sqrt{3}}{12} \right]$ خواهد بود:

$$(a+b)^2 = \left(\frac{-25\sqrt{3}}{12} + \frac{17\sqrt{3}}{12} \right)^2 = \left(\frac{-8\sqrt{3}}{12} \right)^2 = \left(\frac{-2\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{4}{3}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)



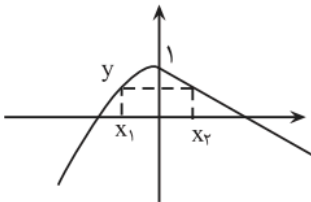
$$\text{از طرفی: } x^2 + y^2 = k^2 \Rightarrow y^2 = k^2 - x^2 \Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi (k^2 - x^2)x = \frac{\pi}{3} (k^2 x - x^3)$$

$$V' = 0 \Rightarrow V' = \frac{\pi}{3} (k^2 - 3x^2) = 0 \Rightarrow k^2 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{k^2}{3} \Rightarrow x = \frac{k}{\sqrt{3}} \quad (1)$$

$$\text{از طرفی: } y^2 = k^2 - x^2 \Rightarrow y^2 = k^2 - \frac{k^2}{3} = \frac{2k^2}{3} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{3}} \quad (1), (2) \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۶۸

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

مساحت مستطیل $S = (x_2 - x_1)y$ است. مقادیر x_1 و x_2 را بر حسب y محاسبه می‌کنیم.

$$y = 1 - x_2^2 \Rightarrow x_2 = 1 - y \quad y = 1 - x_1^2 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{1-y}$$

$$S = (1 - y + \sqrt{1-y})y \Rightarrow S' = \left(-1 + \frac{-1}{2\sqrt{1-y}}\right)y + (1 - y + \sqrt{1-y}) = 0$$

تابع مساحت را بر حسب y بازنویسی می‌کنیم.

$$\text{تابع مساحت را } t \text{ فرض می‌کنیم:}$$

$$\left(-1 - \frac{1}{2t}\right)(1-t^2) + (t^2+t) = 0 \Rightarrow t^2+t = \frac{(2t+1)}{2t}(1-t^2) \Rightarrow t(t+1) = \frac{(2t+1)}{2t}(1-t)(1+t) \xrightarrow{t \neq -1} 2t^2 = 2t - 2t^2 + 1 - t \Rightarrow$$

$$4t^2 - t - 1 = 0 \xrightarrow{t > 0} t = \frac{1 + \sqrt{17}}{8} \Rightarrow x_1 = -t = -\frac{1 + \sqrt{17}}{8}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۶۹

گام اول: ابتدا ضابطه مشتق تابع f را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x+3} - \frac{1}{2\sqrt{x+3}}(x^2 + 36)}{x+3} = \frac{4x(x+3) - (x^2 + 36)}{2(x+3)\sqrt{x+3}} = \frac{3x^2 + 12x - 36}{2(x+3)\sqrt{x+3}} = \frac{3(x+6)(x-2)}{2(x+3)\sqrt{x+3}}$$

گام دوم: حال مشتق تابع f را با توجه به دامنه $(x > -3)$ تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -6, x = 2 \xrightarrow{x > -3} x = 2$$

x	-3	2
f'		- +
f		↘ ↗

گام سوم: با توجه به جدول تعیین علامت، تابع f در بازه $(2, +\infty)$ اکیداً صعودی است. پس حداقل مقدار a برابر ۲ است و داریم:

$$f(a) = f(2) = \frac{40}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 8\sqrt{5}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

گام اول: ابتدا ضابطه تابع f^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$f^{-1}: m = \frac{-1-0}{0-(-2)} = \frac{-1}{2} \quad \text{شیب}$$

با توجه به این که عرض از مبدأ -1 است، ضابطه f^{-1} به شکل $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x - 1$ است.

گام دوم: حال ضابطه وارون $f^{-1}(x)$ یعنی $f(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$y = -\frac{1}{2}x - 1 \Rightarrow \frac{1}{2}x = -y - 1 \xrightarrow{\times 2} x = -2y - 2 \Rightarrow f(x) = -2x - 2$$

گام سوم: ضابطه $(f \circ f)(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x) = -2x - 2 \xrightarrow{(f \circ f)(x) = f(f(x))} (f \circ f)(x) = -2(-2x - 2) - 2 \Rightarrow (f \circ f)(x) = 4x + 2$$

گام چهارم: حال ضابطه به دست آمده را در ضابطه تابع g جاگذاری می‌کنیم و دامنه آن را پیدا می‌کنیم:

$$g(x) = x\sqrt{(f \circ f)(x) - 4} \xrightarrow{(f \circ f)(x) = 4x + 2} g(x) = x\sqrt{4x - 2} \xrightarrow{4x - 2 \geq 0} x \in [\frac{1}{2}, +\infty)$$

گام پنجم: حال مشتق تابع داده شده را تشکیل می‌دهیم:

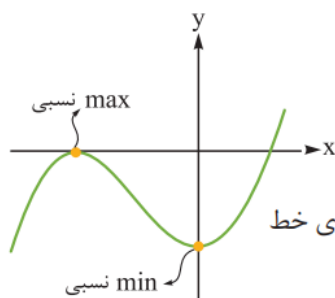
$$g'(x) = \sqrt{4x - 2} + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{4x - 2}} \Rightarrow g'(x) = \sqrt{4x - 2} + \frac{2x}{\sqrt{4x - 2}}$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} g'(x) = \frac{4x - 2 + 2x}{\sqrt{4x - 2}} \Rightarrow g'(x) = \frac{6x - 2}{\sqrt{4x - 2}}$$

تابع g' در دامنه تابع مثبت است، پس تابع g در دامنه خود یعنی $[\frac{1}{2}, +\infty)$ صعودی اکید است.

توجه: با توجه به این که ریشه مشتق در دامنه تابع قرار ندارد، نیازی به رسم جدول نمودار تابع نیست.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)



گام اول: بر روی نمودار، $\min$ و $\max$ نسبی را مشخص کرده‌ایم، به گفته سؤال، این نقاط بر روی خط $y = -2 - 2x$ قرار دارند، پس $x = 0$ را در آن جایگذاری می‌کنیم تا مختصات $\min$ نسبی به دست آید. همچنین $y = 0$ را در آن جایگذاری می‌کنیم تا مختصات $\max$ نسبی به دست آید:

$$y = -2 - 2x \begin{cases} x=0 \rightarrow y = -2 - 2(0) \Rightarrow y = -2 \Rightarrow \min : (0, -2) \\ y=0 \rightarrow 0 = -2 - 2x \Rightarrow x = -1 \Rightarrow \max : (-1, 0) \end{cases}$$

گام دوم: فرم کلی تابع درجه سوم را می‌دانیم، نقاط $(0, -2)$ و $(-1, 0)$ را در آن جایگذاری می‌کنیم:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \begin{cases} (0, -2) \in f \rightarrow -2 = 0 + 0 + 0 + d \Rightarrow d = -2 \\ (-1, 0) \in f \rightarrow 0 = a(-1) + b(1) + c(-1) + d \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 = -a + b - c - 2 \Rightarrow a - b + c = -2 \quad (*)$$

گام سوم: با توجه به نمودار، تابع در $x = 0$ و $x = -1$ مماس افقی دارد، پس مشتق تابع در آن‌ها برابر صفر است:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

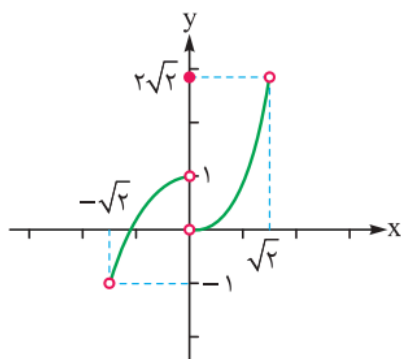
$$\begin{cases} f'(0) = 0 \Rightarrow 0 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = 0 \\ f'(-1) = 0 \Rightarrow 0 = 3a(1) + 2b(-1) + c \Rightarrow 3a - 2b = 0 \Rightarrow 3a = 2b \Rightarrow b = \frac{3}{2}a \end{cases}$$

گام چهارم: روابط به دست آمده در گام سوم را در رابطه $(*)$ جایگذاری می‌کنیم:

$$a - b + c = -2 \Rightarrow a - b = -2 \xrightarrow{b = \frac{3}{2}a} a - \frac{3}{2}a = -2 \Rightarrow -\frac{1}{2}a = -2 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow b = 6$$

پس ضابطه تابع به صورت $f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 2$ است. **گام پنجم:** $f(1) = 4(1)^3 + 6(1) - 2 \Rightarrow f(1) = 8$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)



گام اول: ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

گام دوم: با توجه به نمودار، تابع f در $x = 0$ دارای ماکزیمم نسبی و مطلق است. (نادرستی گزینه (۲) و (۳))

همچنین تابع f دارای مینیمم مطلق نمی‌باشد. (نادرستی گزینه (۴))

تابع f مینیمم نسبی ندارد؛ پس گزینه (۱) صحیح است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

گام اول: ابتدا نقاط بحرانی برای تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = a(x^3 + 3x^2 - 9x) \Rightarrow f'(x) = a(3x^2 + 6x - 9)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -3$$

گام دوم: حال مقادیر $f(1)$ ، $f(-3)$ ، $f(-4)$ و $f(4)$ را حساب می‌کنیم تا ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع f مشخص شود:

$$f(1) = -5a \quad \text{min مطلق}$$

$$f(-3) = 27a$$

$$f(4) = 76a \quad \text{max مطلق}$$

گام سوم: اختلاف مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق را برابر ۵۴ قرار می‌دهیم:

$$|76a - (-5a)| = 54 \xrightarrow{a > 0} 81a = 54 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

گام چهارم: جدول تغییرات رفتار تابع f را می‌نویسیم تا طول نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن مشخص شود:

	-4	-3	1	4
f'	+	•	-	•
	↗	↘	↗	

max نسبی

min نسبی

گام پنجم: مجموع مقادیر ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع f برابر است با:

$$f(-3) + f(1) = 27a + (-5a) = 22a = 22 \times \frac{2}{3} = \frac{44}{3} = 14\frac{2}{3}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۷۵

گام اول: ابتدا دامنه تابع f و سپس ضابطه مشتق آن را به دست می‌آوریم:

$$D_f = [-8, +\infty) \quad \text{و} \quad f'(x) = 1 + \frac{k}{2\sqrt{x+8}}$$

گام دوم: حال نقاط بحرانی تابع f را مشخص می‌کنیم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2\sqrt{x+8} = -k \Rightarrow 4(x+8) = k^2 \Rightarrow x = \frac{k^2}{4} - 8, (k < 0)$$

دقت کنید که اگر $k > 0$ باشد، تابع f اکیداً صعودی می‌شود و مینیمم مطلق آن برابر $f(-8) = -6$ خواهد شد. همچنین اگر $k = 0$ باشد، تابع $y = 2 + x$ مینیمم تابع مطلق نخواهد داشت؛ پس برای این که کم‌ترین مقدار تابع، مقداری غیر از -6 شود، لازم است که معادله $f'(x) = 0$ یک جواب داشته باشد که به معنای آن است که k منفی باشد.

گام سوم: نقاط $x = \frac{k^2}{4} - 8$; $k < 0$ کاندیدهای مینیمم مطلق تابع f هستند:

$$f\left(\frac{k^2}{4} - 8\right) = 2 + \frac{k^2}{4} - 8 + k\sqrt{\frac{k^2}{4}} \xrightarrow{k < 0} f\left(\frac{k^2}{4} - 8\right) = -6 + \frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{2} = -6 - \frac{k^2}{4}$$

گام چهارم: چون مینیمم مطلق تابع برابر -10 است، پس:

$$-6 - \frac{k^2}{4} = -10 \Rightarrow k^2 = 16 \xrightarrow{k < 0} k = -4$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۷۶

گام اول: عرض نقاط A و B را y فرض می‌کنیم، در نتیجه برای مختصات نقاط A و B داریم:

$$A: \sqrt{x} = y \Rightarrow x = y^2 \Rightarrow A(y^2, y)$$

$$B: \sqrt{6-x} = y \Rightarrow x = 6 - y^2 \Rightarrow B(6 - y^2, y)$$

گام دوم: حال مساحت مستطیل را به کمک نقاط A و B می‌نویسیم:

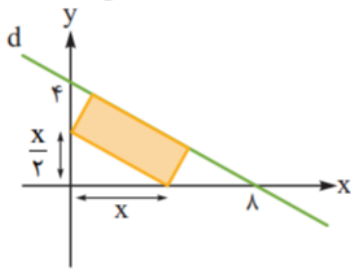
$$S(y) = y(6 - y^2 - y^2) = -2y^3 + 6y$$

$$\Rightarrow S'(y) = -6y^2 + 6 \Rightarrow S'(y) = 0 \xrightarrow{y > 0} y = 1 \Rightarrow S = 4$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

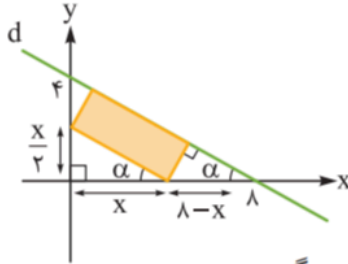
۷۷

گام اول: شیب خط داده شده $-\frac{1}{2}$ است، پس شیب خط دیگر نیز که موازی آن است، $-\frac{1}{2}$ است. با توجه به این موضوع و قضیه فیثاغورس طول مستطیل را پیدا می‌کنیم:



$$\text{طول مستطیل: } \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + x^2} = \sqrt{\frac{5x^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}x$$

گام دوم: با توجه به قضیه خطوط موازی و مورب، زاویه‌های برابر را مشخص کرده‌ایم، دو مثلث پایینی با هم متشابه هستند، عرض مستطیل را برابر y در نظر می‌گیریم:



$$\frac{\lambda - x}{\sqrt{5}} = \frac{y}{x} \Rightarrow y = \frac{\lambda - x}{\sqrt{5}}$$

$\underbrace{\quad}_{\text{رو به قائمه}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{رو به } \alpha}$

گام سوم: حال که طول و عرض را پیدا کرده‌ایم، تابع مساحت را تشکیل می‌دهیم و از آن مشتق می‌گیریم:

$$S(x) = \frac{\sqrt{5}}{2}x \left(\frac{8-x}{\sqrt{5}} \right) \Rightarrow S(x) = 4x - \frac{x^2}{2}$$

گام چهارم: مشتق را برابر صفر قرار می‌دهیم تا نقطه بحرانی پیدا شود و آن را در تابع مساحت قرار می‌دهیم تا بیشترین مقدار مساحت حاصل گردد:

$$S'(x) = 0 \Rightarrow 4 - x = 0 \Rightarrow x = 4 \xrightarrow{S(x) = 4x - \frac{x^2}{2}} S(4) = 16 - \frac{16}{2} = 8$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۷۸

اگر عرض نقاط **B** و **A** برابر y باشد، طول آنها برابر است با:

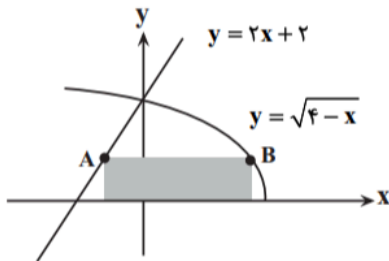
$$x_B = 4 - y^2, \quad x_A = \frac{y-2}{2}$$

$$AB = x_B - x_A = 4 - y^2 - \frac{(y-2)}{2} = 5 - y^2 - \frac{y}{2}$$

پس:

$$2(\text{طول} + \text{عرض}) = 2\left(5 - y^2 - \frac{y}{2} + y\right) = 10 - 2y^2 + y$$

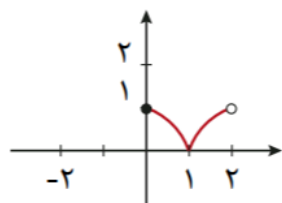
و محیط مستطیل برابر است با:



(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۸۲

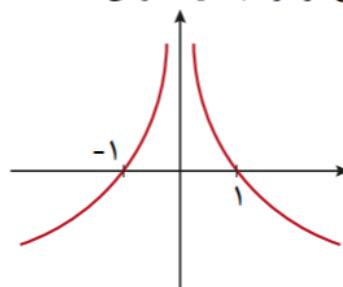
تابع در بازه $[1, 2]$ صعودی اکید است پس $a + \frac{1}{a} = 1$ و کمترین مقدار a برابر $\frac{1}{4}$ است.



$$0 \leq x < 1 \rightarrow y = \cos \frac{\pi x}{4}$$

$$1 \leq x < 2 \rightarrow y = -\cos \frac{\pi x}{4}$$

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x^2 = 2 \log_{\frac{1}{2}} |x| \xrightarrow{\text{رسم}}$$



تابع در $(-\infty, 0)$ صعودی اکید و در $(0, +\infty)$ نزولی اکید است.

(دباز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۸۳

خطوط مماس در نقاطی با طول $x = \pm 1$ بر هم عمودند پس:

$$f(x) = ax^4 - 2x^2 + 1$$

$$f'(1)f'(-1) = -1$$

$$f'(x) = 4ax^3 - 4x \Rightarrow \begin{cases} f'(1) = 4a - 4 = 4(a-1) \\ f'(-1) = -4a + 4 = -4(a-1) \end{cases}$$

$$f'(1) \cdot f'(-1) = -16(a-1)(a-1) = -1$$

$$(a-1)^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow \begin{cases} a-1 = \frac{1}{4} \rightarrow a = \frac{5}{4} \\ a-1 = -\frac{1}{4} \rightarrow a = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$a_1 + a_2 = \frac{1}{4} = 2$$

(دباز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۸۴

در همسایگی $x = 1$ داخل قدرمطلق منفی است پس:

$$\begin{cases} f(x) = x^3 - ax^2 + 3ax + b \\ f'(x) = 3x^2 - 2ax + 3a \end{cases}$$

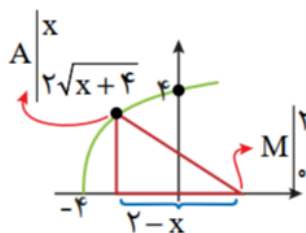
$$\Rightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \Rightarrow b + 2a + 1 = 0 \\ f'(1) = 0 \Rightarrow 3 + a = 0 \Rightarrow a = -3 \Rightarrow b = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b = 2$$

(دباز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۸۵

نقطه $A(x, y)$ را در نظر بگیرید.



$$S = \frac{1}{2}y(2-x) = \frac{1}{2}(2-x) \times 2\sqrt{x+4}$$

$$S' = -\sqrt{x+4} + \frac{2-x}{2\sqrt{x+4}} = \frac{-3x-6}{2\sqrt{x+4}}$$

$$S' = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow S_{\max} = 4\sqrt{2}$$

(دباز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$x = 2$ ریشه داخل رادیکال است. پس: $a = -2$

۸۶

x	$\frac{6}{5}$	2
f'	$+$	$-$
f	$\nearrow$	$\searrow$

$$f(x) = x \sqrt[3]{(x-2)^2}$$

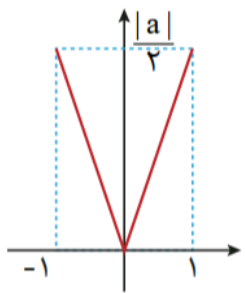
$$f'(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2} + \frac{2x}{3\sqrt[3]{x-2}} = \frac{5x-6}{3\sqrt[3]{x-2}}$$

در بازه $(\frac{6}{5}, 2)$ اکیداً نزولی است.

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

یکی از نقاط بحرانی، $x = 0$ است.

۸۷



$$y = \frac{\pm ax}{x^2+1} \rightarrow y' = \frac{\pm a(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$S = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{2} |a| = \frac{1}{2} |a| = 4$$

$$\Rightarrow |a| = 8$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$f(x) = ax^3 - 3ax + a^2$$

$$f'(x) = 3ax^2 - 3a \xrightarrow{f'=0} x = \pm 1$$

$$\begin{cases} x = -2 \rightarrow y = a(a-2) \\ x = -1 \rightarrow y = a(a+2) \\ x = 1 \rightarrow y = a(a-2) \\ x = 2 \rightarrow y = a(a+2) \end{cases}$$

$$\max = a(a-2)$$

$$\min = a(a+2)$$

$$\max + \min = 2a^2 + 4a = 2(a+2)^2 - 2$$

به ازای $a = -4$ حاصل این عبارت، مینیمم است.

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

نقاط به طول ۱- و ۴ نقاط مینیمم نسبی و نقاط به طول ۲ و ۸ نقاط ماکزیمم نسبی است.

۸۹

$$\text{جواب} = \frac{4-1}{2+8} = \frac{3}{10}$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$f(x) = x(x - \alpha)^2$$

$$f'(x) = (x - \alpha)^2 + 2x(x - \alpha)$$

$$= (x - \alpha)(3x - \alpha)$$

$$f' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \left| \alpha \right. \\ x = \frac{\alpha}{3} \Rightarrow y = \frac{\alpha}{3} \left(\frac{\alpha}{3} - \alpha \right)^2 = \frac{4\alpha^3}{27} \Rightarrow \left| \frac{\alpha}{3} \right. \\ \Rightarrow \frac{4\alpha^3}{27} = 4 \Rightarrow \alpha = 3 \Rightarrow x_{\text{ext}} = \alpha = 3 \end{cases}$$

۹۰

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$f(x) = \frac{x^4 + 8}{x^2 - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{4x^3 \times (x^2 - 1) - (x^4 + 8) \times 2x}{(x^2 - 1)^2}$$

گام اول: از f مشتق می‌گیریم:

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2x^5 - 4x^3 - 16x}{(x^2 - 1)^2}$$

گام دوم: برای پیدا کردن بازه (یا بازه‌هایی) که f در آن‌ها نزولی اکید است، باید نامعادله $f'(x) < 0$ را حل کنیم:

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \frac{2x^5 - 4x^3 - 16x}{(x^2 - 1)^2} < 0 \Rightarrow \frac{2x(x^4 - 2x^2 - 8)}{(x-1)^2(x+1)^2} < 0 \Rightarrow \frac{2x(x^2 - 4)(x^2 + 2)}{(x-1)^2(x+1)^2} < 0 \Rightarrow \frac{2x(x-2)(x+2)(x^2 + 2)}{(x-1)^2(x+1)^2} < 0$$

جدول تعیین علامت می‌کشیم:

	-۲	-۱	۰	۱	۲	
x						
f'	-	+	+	-	-	+
f	↘	↗	↗	↘	↘	↗

گام سوم: با توجه به جدول تعیین علامت رسم‌شده، واضح است که f روی بازه $(0, 1)$ اکیداً نزولی است؛ پس حداکثر مقدار α برابر ۱ می‌شود.حالا باید مقدار $f(\alpha + 1) = f(1 + 1) = f(2)$ را محاسبه کنیم:

$$f(x) = \frac{x^4 + 8}{x^2 - 1} \Rightarrow f(2) = \frac{16 + 8}{4 - 1} = 8$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۹۱



(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

@LoPRax_KonKour

گام اول: $x - \sqrt{1-x^2}$ را برابر $g(x)$ در نظر می‌گیریم؛ پس $f(x - \sqrt{1-x^2}) = f(g(x))$ می‌شود.

گام دوم: دامنه g به صورت زیر است:

$$g(x) = x - \sqrt{1-x^2} \Rightarrow 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 1 \leq 0 \xrightarrow{\text{بین ریشه‌ها}} x \in [-1, 1]$$

گام سوم: از g مشتق می‌گیریم و آن را برابر صفر قرار می‌دهیم تا طول نقاط بحرانی‌اش حاصل شود:

$$g(x) = x - \sqrt{1-x^2} \Rightarrow g'(x) = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2} + x}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-x^2} + x = 0 \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = -x \xrightarrow{x \leq 0} 1-x^2 = x^2 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \xrightarrow{x \leq 0} x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

گام چهارم: نقاط سر و ته بازه دامنه g و $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ طول نقاط بحرانی تابع‌اند:

$$g(x) = x - \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \begin{cases} g(1) = 1 - \sqrt{1-1^2} = 1 \\ g(-1) = -1 - \sqrt{1-(-1)^2} = -1 \\ g(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{1-(-\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \end{cases}$$

بنابراین حداقل و حداکثر مقدار g به ترتیب برابر $-\sqrt{2}$ و 1 هستند؛ پس برد g به صورت $[-\sqrt{2}, 1]$ می‌شود.

گام پنجم: حالا که برد g به صورت $[-\sqrt{2}, 1]$ است، باید برد $f(x)$ را روی بازه $[-\sqrt{2}, 1]$ به دست آوریم (الان احتمالاً یهو میگی که هان؟! خوب ببین ما تابع $f(g(x))$ رو داشتیم. g مقادیر بازه $[-\sqrt{2}, 1]$ رو به ما می‌ده؛ پس همین مقادیر می‌شن ورودی‌های f ؛ پس برای به دست آوردن $\min$ و $\max f(g(x))$ ، کافیست برد $f(x)$ روی بازه $[-\sqrt{2}, 1]$ رو حساب کنیم).

گام ششم: از f مشتق می‌گیریم و آن را برابر صفر قرار می‌دهیم تا طول نقاط بحرانی آن به دست آیند:

$$f(x) = x^4 - x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 2x = 0 \Rightarrow 2x(2x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

گام هفتم: نقاط سر و ته بازه (یعنی $x = -\sqrt{2}$ و $x = 1$) به همراه $+\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $x = 0$ طول نقاط بحرانی تابع‌اند:

$$f(x) = x^4 - x^2 + 1 \Rightarrow \begin{cases} f(-\sqrt{2}) = 3 \\ f(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{3}{4} \\ f(0) = 1 \\ f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{3}{4} \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

گام هشتم: حداقل و حداکثر مقدار f به ترتیب برابر $\frac{3}{4}$ و 3 هستند که مجموع آن‌ها برابر $\frac{15}{4} = 3 + \frac{3}{4}$ می‌شود.

گام اول: f را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = \frac{x|x-1|}{x^2+1} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x}{x^2+1} & x \geq 1 \\ -\frac{x^2-x}{x^2+1} & x < 1 \end{cases}$$

(حد چپ و راست و مقدار f در $x=1$ برابر صفر است؛ پس f در $x=1$ پیوسته می‌شود.)

گام دوم: از f مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2} & x > 1 \\ -\frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2} & x < 1 \end{cases}$$

ضابطه بالایی: $f'_+(1) = \frac{1+2-1}{4} = \frac{1}{4}$

ضابطه پایینی: $f'_-(1) = -\frac{1+2-1}{4} = -\frac{1}{4}$

گام سوم: مشتق چپ و راست f در $x=1$ را محاسبه می‌کنیم:

پس f در $x=1$ مشتق‌پذیر نیست و $x=1$ طول یکی از نقاط بحرانی f می‌شود.

گام چهارم: حالا باید هر دو ضابطه بالایی و پایینی را برابر صفر قرار دهیم تا طول نقاطی که f' در آن‌ها برابر صفر است، به دست آید:

$$\text{ضابطه بالایی: } \frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x^2+2x-1=0 \xrightarrow{\Delta=8} \begin{cases} x = \frac{-2+\sqrt{8}}{2} = -1+\sqrt{2} & x \\ x = \frac{-2-\sqrt{8}}{2} = -1-\sqrt{2} & x \end{cases}$$

$$\text{ضابطه پایینی: } -\frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x^2+2x-1=0 \xrightarrow{\Delta=8} \begin{cases} x = \frac{-2+\sqrt{8}}{2} = -1+\sqrt{2} & \checkmark \\ x = \frac{-2-\sqrt{8}}{2} = -1-\sqrt{2} & \checkmark \end{cases}$$

هر دو ریشه برای ضابطه بالایی غیر قابل قبول‌اند (چون $x > 1$ است)، ولی هر دو ریشه ضابطه پایینی قابل قبول‌اند؛ پس جدول تعیین علامت f' به صورت مقابل می‌شود:

	$-1-\sqrt{2}$	$-1+\sqrt{2}$	1	
x				
f'	-	+	-	+
	↘	↗	↘	↗
		max نسبی		

بنابراین طول نقطه ماکزیمم نسبی برابر $-1+\sqrt{2}$ است.

گام پنجم: در آخر کافی است در ضابطه f ، به جای x قرار دهیم $-1+\sqrt{2}$ تا عرض نقطه ماکزیمم نسبی حاصل شود:

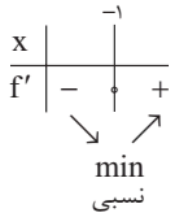
$$f(x) = \frac{x|x-1|}{x^2+1} \Rightarrow f(-1+\sqrt{2}) = \frac{(-1+\sqrt{2})|(-1+\sqrt{2})-1|}{(-1+\sqrt{2})^2+1} = \frac{(-1+\sqrt{2})(-2+\sqrt{2})}{4-2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2}-1)(2-\sqrt{2})}{2(2-\sqrt{2})}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{2} \approx \frac{1/4-1}{2} = \frac{-3/4}{2} = -3/8 \xrightarrow{\text{جزء صحیح}} \text{صفر}$$

گام اول: از f مشتق می‌گیریم:

$$f(x) = \frac{m-5}{x^2+2x+m} \Rightarrow f'(x) = \frac{0 \times (x^2+2x+m) - (m-5)(2x+2)}{(x^2+2x+m)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\overbrace{(-m+5)}^{x=-1 \text{ ریشه}} (2x+2)}{(x^2+2x+m)^2}$$

تنها ریشه f' ، $x = -1$ است؛ پس همین نقطه باید مینیمم نسبی تابع f باشد.گام دوم: برای این که $x = -1$ طول نقطه مینیمم نسبی تابع f باشد، جدول تغییرات تابع f در اطراف $x = -1$ باید به صورت زیر شود:گام سوم: دقت کنید که مخرج f' همواره مثبت است و علامت $2x+2$ بعد از ریشه‌اش (همان -1) مثبت است؛ پس $-m+5$ باید مثبت باشد که نتیجه می‌دهد $m < 5$ است.گام چهارم: حالا که $m < 5$ است، در ضابطه تابع یعنی $f(x) = \frac{m-5}{x^2+2x+m}$ ، علامت صورت منفی است؛ پس اگر مخرج ریشه داشته باشد (ریشه ساده یا مضاعف)، حد f در حداقل یکی از طرفین ریشه‌های مخرج برابر $-\infty$ می‌شود که در این صورت تابع دیگر مینیمم مطلق ندارد؛ پس دلتای مخرج باید منفی باشد:

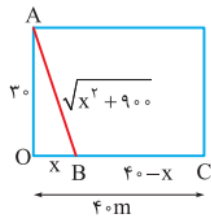
$$\Delta = 4 - 4m < 0 \Rightarrow 4 < 4m \Rightarrow 1 < m$$

گام پنجم: با توجه به دو شرط $1 < m < 5$ و $m < 5$ ، پس ۳ مقدار صحیح برای m داریم.

دام تستی حواست باشه الان بهو نگی جواب می‌شه (۲) که تو دام بیفتی!

گام ششم: در تابع f ، در یک حالت دیگر هم مینیمم نسبی و مینیمم مطلق برابر می‌شوند (در چه حالتی؟). در حالتی که $m = 5$ باشد، چون در این صورت، صورت f برابر صفر می‌شود؛ پس f تابع ثابت $y = 0$ شده که در این صورت، همه نقاط آن مینیمم نسبی و مطلق هستند؛ بنابراین برای m چهار مقدار صحیح ۲، ۳، ۴ و ۵ را داریم و جواب درست (۳) است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)



گام اول: ابتدا فرض کنید $BO = x$ باشد که در این صورت با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث ABO ،

$AB = \sqrt{x^2 + 900}$ می شود. به علاوه، طول CO برابر 40 است که $BC = CO - BO = 40 - x$ می شود.

گام دوم: سرعت شخص در مسیر AB برابر 1 است؛ پس مدت زمانی که از A به B می رود، برابر است با:

$$t_{AB} = \frac{x_{AB}}{V_{AB}} = \frac{\sqrt{x^2 + 900}}{1} = \sqrt{x^2 + 900}$$

گام سوم: سرعت شخص در مسیر BC برابر $\sqrt{5}$ است؛ پس مدت زمانی که از B به C می رود، برابر است با:

$$t_{BC} = \frac{x_{BC}}{V_{BC}} = \frac{40 - x}{\sqrt{5}}$$

پس زمان رسیدن او از A به C برابر $t(x) = \sqrt{x^2 + 900} + \frac{40 - x}{\sqrt{5}}$ می شود.

گام چهارم: کمترین زمان رسیدن از A به C را می خواهیم. از t مشتق می گیریم و آن را برابر صفر قرار می دهیم تا طول نقاط بحرانی حاصل شود:

$$\Rightarrow t'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 900}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 900}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \xrightarrow{x > 0} \frac{x^2}{x^2 + 900} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow 5x^2 = x^2 + 900 \Rightarrow 4x^2 = 900 \Rightarrow x^2 = \frac{900}{4} \xrightarrow{x > 0} x = \frac{30}{2} = 15$$

گام پنجم: با جای گذاری $x = 15$ در t ، جواب حاصل می شود:

$$t(x) = \sqrt{x^2 + 900} + \frac{40 - x}{\sqrt{5}} \Rightarrow t(15) = \sqrt{1125} + \frac{25}{\sqrt{5}} = \sqrt{225 \times 5} + 5\sqrt{5} = 15\sqrt{5} + 5\sqrt{5} = 20\sqrt{5}$$

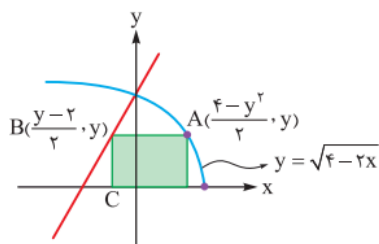
(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: معادله خط گذرنده از دو نقطه $(0, 2)$ و $(-1, 0)$ به صورت زیر است:

$$\text{شیب: } \frac{2-0}{0-(-1)} = 2$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow{m=2, (x_0, y_0)=(0, 2)} y - 2 = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x + 2$$

گام دوم: عرض دو نقطه A و B را برابر y در نظر می‌گیریم که در این صورت $x_A = \frac{4-y^2}{2}$ و $x_B = \frac{y-2}{2}$ می‌شود.



گام سوم: حالا واضح است که طول مستطیل برابر $AB = \frac{4-y^2}{2} - \frac{y-2}{2} = -\frac{y^2}{2} - \frac{y}{2} + 3$ و عرض آن برابر $BC = y$ است؛ پس مساحت مستطیل برابر است با:

$$S(y) = \left(-\frac{y^2}{2} - \frac{y}{2} + 3\right)y = -\frac{y^3}{2} - \frac{y^2}{2} + 3y, \quad 0 < y < 2$$

گام چهارم: از S مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم تا طول نقاط بحرانی حاصل شود:

$$S'(y) = -\frac{3}{2}y^2 - y + 3 = 0 \xrightarrow{\times(-\frac{2}{3})} y^2 + \frac{2}{3}y - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{19}}{3} \\ y = -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{19}}{3} \end{cases}$$

غقیق، چون منفی است.

پس بیشترین مساحت مستطیل وقتی حاصل می‌شود که عرض آن برابر $-\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{19}}{3}$ باشد.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته تابع $y = |f(x)|$ در ریشه‌های ساده $f(x)$ مشتق‌ناپذیر است.

گام اول: با توجه به نمودار رسم‌شده برای f' ، واضح است که f در $x = -2$ مشتق‌ناپذیر است؛ پس باید ریشه ساده عبارت درون قدرمطلق یعنی $(x-1)(ax^2 + bx - 4)$ باشد؛ پس مقدار $ax^2 + bx - 4$ در $x = -2$ برابر صفر می‌شود: (I) $4a - 2b - 4 = 0$
گام دوم: از طرفی درون قدرمطلق $(x-1)$ داریم، ولی با توجه به نمودار f, f' در $x = 1$ مشتق‌پذیر است؛ پس نباید ریشه ساده عبارت درون قدرمطلق باشد و $ax^2 + bx - 4$ هم باید در $x = 1$ برابر صفر شود (که در این صورت درون قدرمطلق $(x-1)^2$ داشته باشیم تا f در $x = 1$ مشتق‌پذیر شود):
 $a + b - 4 = 0$ (II)

گام سوم: با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول (I) و (II)، $a = 2$ و $b = 2$ می‌شود؛ پس ضابطه g به صورت زیر است:
 $g(x) = |ax^2 + bx + a - b| = |2x^2 + 2x|$

گام چهارم:

نکته ریشه‌های $f(x) = 0$ و $f'(x) = 0$ ، نقاط بحرانی تابع $y = |f(x)|$ هستند (دقت کنید! اجتماع نقاطی که $f(x) = 0$ و $f'(x) = 0$ است، نه اشتراک آن‌ها).

با توجه به نکته بالا داریم:

$$g(x) = |2x^2 + 2x| \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2x = 0 \Rightarrow 2x(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0, -1 \\ (2x^2 + 2x)' = 0 \Rightarrow 4x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

بنابراین طول نقاط بحرانی تابع g ، صفر، -1 و $-\frac{1}{2}$ هستند که مجموع آن‌ها برابر $-\frac{3}{2}$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

ابتدا دامنه تابع را به دست می آوریم:

$$f(x) = 2x + k - \sqrt{5 - x^2} \Rightarrow 5 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 5 \Rightarrow D_f = [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$$

پس $x = -\sqrt{5}$ و $x = \sqrt{5}$ طول نقاط بحرانی تابع f هستند.اکنون با محاسبه $f'(x)$ و حل معادله $f'(x) = 0$ ، نقاط بحرانی دیگر تابع را به دست می آوریم:

$$f'(x) = 2 - \frac{-2x}{2\sqrt{5-x^2}} \Rightarrow f'(x) = 2 + \frac{x}{\sqrt{5-x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{5-x^2}} = -2 \xrightarrow[-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}]{\text{توان } 2} \frac{x^2}{5-x^2} = 4 \Rightarrow x^2 = 20 - 4x^2 \Rightarrow 5x^2 = 20 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$\xrightarrow{x < -\sqrt{5}} x = -2$$

اکنون بیشترین و کمترین مقدار تابع را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} f(-\sqrt{5}) = -2\sqrt{5} + k \\ f(\sqrt{5}) = 2\sqrt{5} + k \\ f(-2) = -5 + k \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2\sqrt{5} + k = \text{ماکزیمم مطلق} \\ -5 + k = \text{مینیمم مطلق} \end{matrix}$$

حال با توجه به فرض سؤال، داریم:

$$2\sqrt{5} + k = 4\sqrt{5} \Rightarrow k = 2\sqrt{5} \Rightarrow \text{مینیمم مطلق} = -5 + k = -5 + 2\sqrt{5}$$

پس خواسته سؤال برابر است با:

$$[-5 + 2\sqrt{5}] = -5 + [2\sqrt{5}] = -5 + 4 = -1$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

تابع موردنظر را f می نامیم. ابتدا نقطه بحرانی تابع را با حل معادله $f'(x) = 0$ پیدا می کنیم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow a + \frac{b}{2\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow a = \frac{-b}{2\sqrt{x}} \Rightarrow 2\sqrt{x} = \frac{-b}{a} \xrightarrow[-\frac{b}{a} > 0]{} x = \frac{b^2}{4a^2}$$

عرض نقطه ای با این طول روی تابع برابر است با:

$$f\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) = a \times \frac{b^2}{4a^2} + b\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}} = \frac{b^2}{4a} + b \times \left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} = -\frac{b^2}{4a}$$

این نقطه روی خط $y = x$ قرار دارد، پس:

$$\frac{b^2}{4a^2} = -\frac{b^2}{4a} \Rightarrow 4a^2 = -4a \Rightarrow a = -1$$

(توجه کنید a یا b نمی توانند برابر صفر باشند.)

$$-\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow \frac{-b}{-1} > 0 \Rightarrow b > 0$$

همچنین با توجه به اینکه $-\frac{b}{a} > 0$ ، پس:بنابراین تنها گزینه ۱ یعنی $(-1, 5)$ می تواند برابر (a, b) باشد.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۰۱

ابتدا دامنه تابع را با توجه به شرط $a > 0$ ، به دست می آوریم:

$$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{a-x} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ a-x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{a}{2} \end{cases} \xrightarrow{\cap} D_f = \left[0, \frac{a}{2}\right]$$

پس $x=0$ و $x=\frac{a}{2}$ ، طول نقاط بحرانی تابع f هستند.اکنون با محاسبه f' ، طول سایر نقاط بحرانی تابع f را به دست می آوریم:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{-1}{2\sqrt{a-x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{a-x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{a-x}} \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{a-x}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x = a-x \Rightarrow x = \frac{a}{2}$$

حال با محاسبه عرض نقاط بحرانی، ماکزیمم و مینیمم مطلق را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} f(0) = \sqrt{a} \\ f\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{a}{2}} + \sqrt{\frac{a}{2}} = \sqrt{2a} \\ f\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{a}{2}} + \sqrt{\frac{a}{2}} = \sqrt{2a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a} = \text{مینیمم مطلق} \\ \sqrt{2a} = \text{ماکزیمم مطلق} \end{cases}$$

پس داریم:

$$\sqrt{a} \times \sqrt{2a} = 2\sqrt{a^3} \Rightarrow \sqrt{2a^3} = 2\sqrt{a^3} \xrightarrow{a>0} a=4$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$D_f = [0, 8] \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 2\sqrt{2} \\ f(8) = 4 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{2\sqrt{8-x}} \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$\sqrt{2x} = 2\sqrt{8-x} \Rightarrow 2x = 4(8-x) \Rightarrow 2x = 32-4x \Rightarrow x = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$$

$$f\left(\frac{16}{3}\right) = \sqrt{\frac{32}{3}} + \sqrt{\frac{8}{3}} = \sqrt{\frac{40}{3}} = \sqrt{24}$$

$$\begin{aligned} \max &= \sqrt{24} \\ \min &= 2\sqrt{2} \end{aligned} \Rightarrow \max \cdot \min = \sqrt{24} \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{48} = 8\sqrt{3}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$f'(x) = x^2 - (3a+1)x + 3a$$

تابع در یک بازه نزولی اکید است، پس $f'(x) < 0$ ، همچنین در تابع $f'(x)$ جمع ضرایب صفر است.

$$f'(x) = (x-1)(x-3a) \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3a \end{cases}$$

$$3a-1=1 \Rightarrow 3a=2 \Rightarrow a=\frac{2}{3}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۰۲

۱۰۳

$$f(x) = x - 2\sqrt{5-x^2} + k$$

$$D_f = [-\sqrt{5}, \sqrt{5}] \Rightarrow \begin{cases} f(\sqrt{5}) = \sqrt{5} + k \\ f(-\sqrt{5}) = -\sqrt{5} + k \end{cases}$$

$$f'(x) = 1 - 2 \times \frac{-2x}{2\sqrt{5-x^2}} = 1 + \frac{2x}{\sqrt{5-x^2}} = \frac{\sqrt{5-x^2} + 2x}{\sqrt{5-x^2}}$$

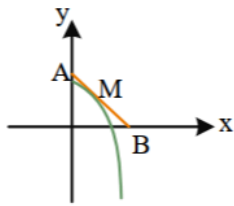
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{5-x^2} = -2x \quad x < 0$$

$$5-x^2 = 4x^2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ غ ق ق } \\ x = -1 \Rightarrow f(-1) = -1 - 2 + k = k - 5 \end{cases}$$

$$\max = \sqrt{5} + k = 5 + \sqrt{5} \Rightarrow k = 5$$

$$\min = -5 + k \Rightarrow \min = 0$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)



$$\text{شیب خط مماس} = -2\alpha \text{ و } M \Big|_{\begin{matrix} \alpha \\ 4-\alpha^2 \end{matrix}}$$

$$\text{خط مماس: } y = -2\alpha x + 4 + \alpha^2$$

$$\text{اگر نقطه تماس } M \Big|_{\begin{matrix} \alpha \\ 4-\alpha^2 \end{matrix}} \text{ باشد، } y' = -2x$$

$$A \Big|_{\begin{matrix} 0 \\ 4+\alpha^2 \end{matrix}} \quad B \Big|_{\begin{matrix} \frac{4+\alpha^2}{2\alpha} \\ 0 \end{matrix}}$$

$$S = \frac{1}{2} \times \left(\frac{4+\alpha^2}{2\alpha} \right) \times (4+\alpha^2) = \frac{(4+\alpha^2)^2}{4\alpha}$$

$$S' = 0 \Rightarrow 4\alpha(4+\alpha^2)(4\alpha) - 4(4+\alpha^2)^2 = 0$$

$$(4+\alpha^2)(16\alpha^2 - 16 - 4\alpha^2) = 0 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$y = xf(-x) = x \left(\frac{-ax+b}{x+2} \right) = \frac{-ax^2+bx}{x+2}$$

$$y' = \frac{(-2ax+b)(x+2) - (-ax^2+bx)}{(x+2)^2}$$

$$y(1) = 2 \Rightarrow \frac{-a+b}{2} = 2 \Rightarrow b-a = 4$$

$$y'(1) = 0 \Rightarrow 2(b-2a) + a - b = 0$$

$$\begin{cases} 2b-5a = 0 \\ b-a = 4 \end{cases} \Rightarrow -3a = -12 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 12 \end{cases}$$

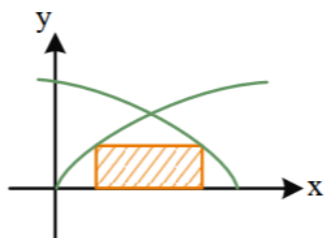
$$f(x) = \frac{6x+12}{-x+2}, y = \frac{-6x^2+12x}{x+2}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۰۴

۱۰۵

۱۰۶



$$S(\alpha) = \frac{1}{2}(a\alpha - 3\alpha^2) \quad S' = 0 \Rightarrow a - 6\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\sqrt{a}}{3}$$

$$S_{\max} = \frac{\sqrt{a}}{6} \left(a - \frac{a}{3} \right) = \frac{\sqrt{a}}{6} \times \frac{2}{3} a = \frac{a\sqrt{a}}{9}$$

$$S_{\max} = \frac{a\sqrt{a}}{9} = \frac{16\sqrt{2}}{9} \Rightarrow a\sqrt{a} = 16\sqrt{2} \Rightarrow a = 8$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$M \left| \begin{array}{c} a - \alpha^2 \\ 2 \\ \alpha \end{array} \right|, \quad N \left| \begin{array}{c} \alpha^2 \\ \alpha \end{array} \right|$$

$$S = \alpha \left(\frac{a - \alpha^2}{2} - \alpha^2 \right) = \frac{\alpha}{2} (a - 3\alpha^2)$$

به ازای $\alpha = \frac{\sqrt{a}}{3}$ مساحت بیشترین است.